PRETOK SKOZI FILTER

====================

UVOD

Naloga izvira iz avtorjevega opazovanja posode s filtrom za vodni kamen. Taka posoda je sestavljena iz dveh delov: zgornjega z vodo z vodnim kamnom in spodnjega z vodo predvidoma brez vodnega kamna. Med njima je filter, skozi katerega se pretaka voda.
Pri posodi, ki jo je avtor opazoval, se v neki točki zgodi, da se gladina vode v spodnji posodi dvigne nad spodnji rob filtra. Ko na stvar pogledamo s stališča fizike, se poraja kup zanimivih vprašanj, ne katera lahko poiščemo odgovore.

PRETOK

Najprej poiščimo način za merjenje (masnega) pretoka. Definiramo ga kot

$$\Phi_m = \frac{dm}{dt},$$

kjer je m masa kapljevine v zgornji posodi. Poleg masnega lahko definiramo še volumski pretok

$$\Phi_V = \frac{dV}{dt},$$

ki je z masnim v zvezi

$$\Phi_m = \rho\Phi_V,$$

kjer je ρ gostota kapljevine. Diferenciale (d) lahko pišemo tudi kot spremembe (Δ).

Masni pretok lahko izmerimo na več načinov. Najlažji je tehtanje spodnje posode. Zgornji del s filtrom ločimo od spodnjega, spodnjega pa postavimo na tehtnico. Spreminjanje mase s časom nam da pretok. Lahko bi tudi tehtali zgornjo posodo., a je to težje, ker bi morala viseti na merilcu (silomeru).

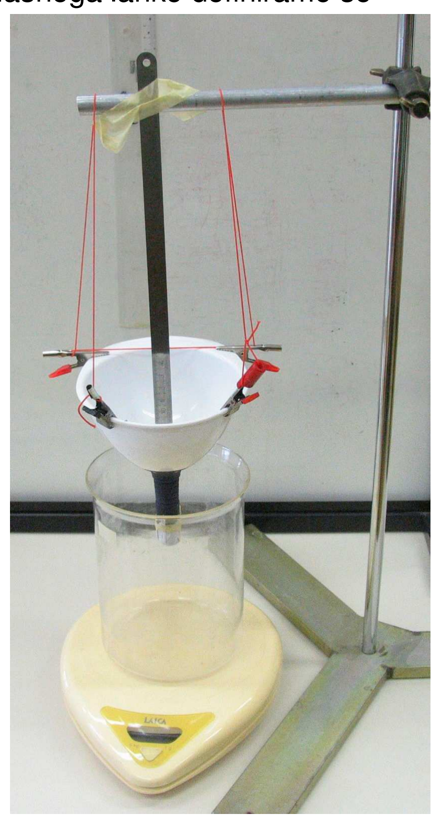
Pretok se bo v splošnem s časom spreminjal. Kako, je odvisno od oblike zgornje posode. Za preproste oblike lahko napovemo približno obnašanje. Privzemimo, da je pretok sorazmeren s tlakom.

$$\Phi_m = Cp,$$

kjer je p tlak in C sorazmernostni koeficient. Tlak pa je sorazmeren z višino vode v zgornji posodi

$$p = \rho g h,$$

kjer je g težni pospešek, h pa višina gladine.



Slika 1: Slika ene od možnih postavitev naprave.

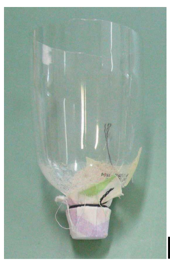
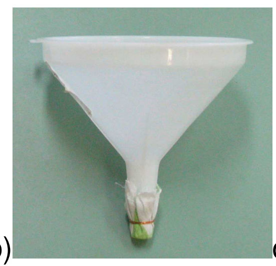
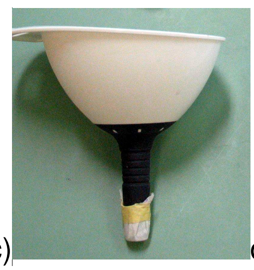
Pri teh privzetkih lahko torej napovemo, da se bo pretok s časom manjšal, saj se manjša gladina.

OBLIKA ZGORNJE POSODE IN SPREMINJANJE VIŠINE GLADINE

Vprašajmo se, kako oblika zgornje posode vpliva na časovni potek višine gladine v zgornji posodi.

Pretok je odvisen od višine gladine, sam pa povzroča znižanje gladine. To pomeni, da je sprememba višine gladine sorazmerna z višino gladine samo. Taka zveza med količinami nakazuje na eksponentno funkcijo.

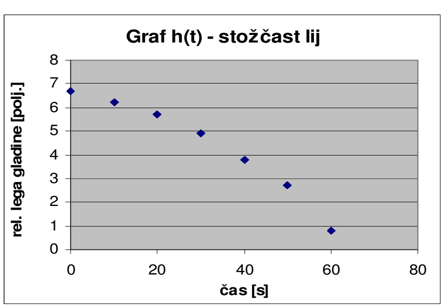
Premislimo o različnih oblikah posode:

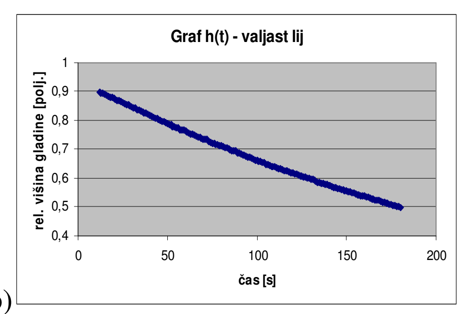
a)  b)  c)  d) 

Slika 2: Različne oblike lijev: a) približno valjast, b) stožčast, c) in d) približno parabolična.

a) valjasta posoda pomeni, da je njen presek enak za vse višine. Tu je sprememba višine gladine res odvisna od trenutne višine gladine. Manj bo vode, počasneje bo iztekala, počasneje se bo gladina zniževala. Dobimo padajočo eksponentno funkcijo.

b) stožčasta posoda pomeni, da gre za vrh stožca. Premer posode se linearno spreminja z višino, zato se presek spreminja s kvadratom višine. Če bi bil pretok konstanten, bi se pri nižji višini gladina hitreje spreminjala kot pri višji. Ker pa bi bila tudi višina gladine in s tem tlak manjši, bi bil tudi pretok manjši in gladina bi se počasneje spreminjala. Kateri učinek bi prevladal je težko napovedati brez računa, očitno pa lahko z obliko posode nekako kompenziramo učinek znižane višine gladine.

a) 

b) 

Slika 3: Sliki kažeta potek lege gladine v odvisnosti od časa za a) stožčast lij in b) valjast lij. Vidimo, da je ukrivljenost v a) primeru negativna, v b) pa pozitivna. Zato smemo domnevati, da obstaja oblika lija, kjer je potek linearen (ukrivljenosti ni).

Vprašajmo se, ali je mogoče doseči linearno spreminjanje višine?

Na to vprašanje bomo najlažje odgovorili z nekaj matematike. Zapišimo enačbo za pretok

$\Phi_m = Cp$,

in jo z upoštevanjem zvez $p = \rho gh$, $\Phi_m = \Delta m / \Delta t$, $\Delta m = \rho S(h)\Delta h$, kjer je $S(h)$ presek posode, ki je načelno lahko različen za različne višine, preoblikujmo v

$$\rho S(h)\frac{\Delta h}{\Delta t} = C\rho gh$$

in naprej v

$$\frac{S(h)}{h}\Delta h = Cg\Delta t$$

ali

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = Cg\frac{h}{S(h)}$$

Želimo doseči, da bi bila sprememba višine v časovni enoti neodvisna od višine in konstantna. To pomeni, da morajo na desni nastopati samo konstante. To lahko dosežemo, če zahtevamo, da je

$S(h) = Kh$,

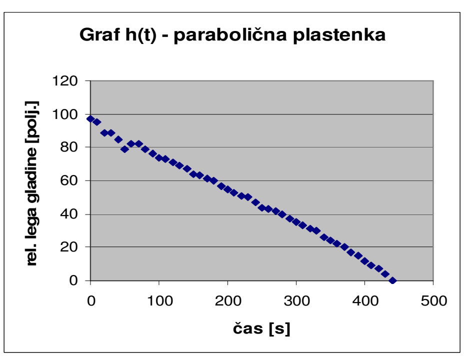
kjer je K konstanta (presek posode sorazmeren z višino). Če je presek okrogle oblike, kar je običajno, lahko pišemo

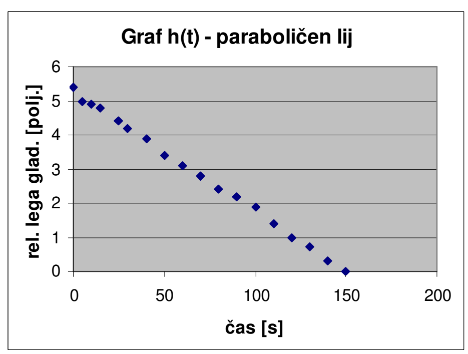
$S = \pi r^2 = Kh$,

od koder sledi

$h \propto r^2$ oziroma $r \propto \sqrt{h}$.

Posoda, v kateri bi bila med iztekanjem višina gladine premo sorazmerna s časom iztekanja, mora torej biti parabolične oblike.

a) 

b) 

Slika 4: Grafa prikazujeta spreminjanje lege gladine s časom za a) plastenko približno parabolične oblike in b) lij približno parabolične oblike. V obeh primerih je jasno vidno področje linearnega spreminjanja. Neidealnost posod ob ekstremih pa povzroči nekaj odstopanja od te odvisnosti ob robovih grafov.

PRETOK V ODVISNOSTI OD VIŠINE - POISEUILLOV ZAKON

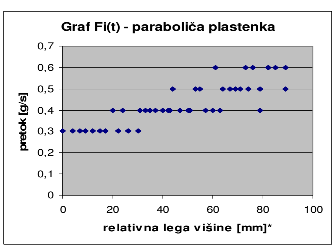
Velikokrat ponujamo analogijo med električnim in vodnim tokom. S stališča te analogije, bi moral veljati tudi "ohmov" zakon, ki se za primer kapljevin imenuje Poiseuillov zakon. To lahko preverimo tako, da hkrati merimo pretok in višino gladine v zgornji posodi.

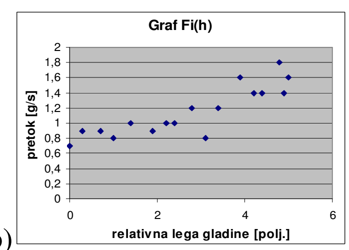
Pretok že znamo meriti, višine gladine pa še ne. Seveda lahko uporabimo preprost meter, ki ga potopimo v vodo in odčitavamo višine ob različnih časih. Lahko laserski žarek usmerimo v gladino in ga po odboju ujamemo na navpični steni, na katero lahko pritrdimo meter. Lahko izdelamo plovec s kazalcem, ki se premika ob metru, lahko pa tudi izdelamo plovec z "ograjo", ki se premika mimo optičnih vrat. Ena možnost je, da odčitavamo tlak na dnu zgornje posode. Še ena možnost je, da v zgornjo posodo potopimo plovec pravilne oblike in merimo silo vzgona naj, ki je odvisna od potopljenega dela plovca. Vsaka od teh metod ima svoje prednosti in pomanjkljivosti, zato prepuščamo iznajdljivosti uporabnika, kako naj to izvede.

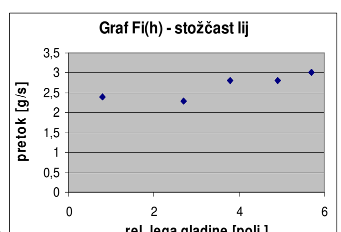
Poiseuillov zakon ali bernoullijeva enačba?

Običajno zvezo med hitrostjo in hidrostatičnim tlakom podaja bernoullijeva enačba
$\rho g h = \rho v^2$.
Zvezo med pretokom in hitrostjo iztekanja lahko zapišemo
$$\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho S' \Delta x}{\Delta t} = \rho S' v .$$
Ta zveza je linearna, torej bi morala biti po bernoullijevi enačbi zveza med pretokom in hitrostjo kvadratna. Vendar bernoullijeva enačba nikjer ne upošteva upora zaradi viskoznosti kapljevine. Izkaže se, da je zveza linearna, če kapljevina izteka skozi področje z velikim uporom (ozka cev, pesek, filter). Domnevati smemo, da obstaja med enim in drugim režimom vmesno področje, kjer zveza ni niti linearna, niti kvadratna. Če hočemo raziskovati poiseullov zakon, moramo poskrbeti, da je ovira taka, da pridemo v linearno področje. S peskom, filtrom, krpo ali dovolj dolgo in dovolj tanko cevko lahko to dosežemo.

Meritve so bile izvedene za lije različnih oblik. rezultati niso tako dobri, da bi lahko iz njih bodisi potrdili ali ovrgli hipotezo o poiseuillovem zakonu, je pa opaziti, da je pri višjih višinah graf ukrivljen kvečjemu navzgor, kar pomeni, da je pretok prej funkcija potence višine kot korena, kot napoveduje bernoullijeva enačba. Meritev bi bilo treba ponoviti z večjo natančnostjo, večjim uporom, daljšim časom meritve in več podatki.

a)


b)


c)


Slika 5: Grafi predstavljajo pretok skozi filter v odvisnosti od višine (lege) gladine za različne oblike posode: a) približno parabolična plastenka, b) približno paraboličen lij, c) stožčast lij. Zveza ni očitno linearna, kot bi pričakovali po poiseuillovem zakonu. Lahko opazimo, da je graf pri velikih višinah prej zavit navzgor kot navzdol, kot bi pričakovali po bernoullijevi enačbi ($\Phi_m \propto \sqrt{h}$). Slaba resolucija grafa je posledica majhnih sprememb mase (glede na samo natančnost odčitavanja mase) v časovni enoti, kar ima za posledico slabo resolucijo časovnega odvoda. Daljših intervalov in s tem večjih sprememb pa si nismo mogli privoščiti, ker bi dobili premalo meritev, preden bi voda iztekla.

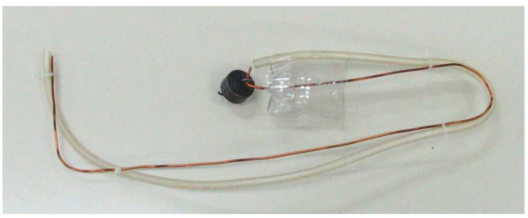
KAKO DOSEČI KONSTANTEN PRETOK

Ugotovili smo že, da lahko dosežemo linearno odvisnost med višino gladine in časom z obliko posode. Ali bi se dalo doseči tudi konstanten pretok?

V vsakem primeru je pretok odvisen od višine gladine in neodvisen od oblike posode, zato z obliko tega ne moremo doseči. Doseči bi morali konstantno višino gladine kljub pretoku. Kako pa to doseči?

Višina gladine se ne meri od dna posode pač pa od točke iztekanja. Točka iztekanja bi morala torej biti ves čas enako globoko pod gladino. Odgovor je natega, katere zgornji konec pritrdimo na plovec. S tem poskrbimo, da se tudi spodnji konec niža istočasno z gladino.

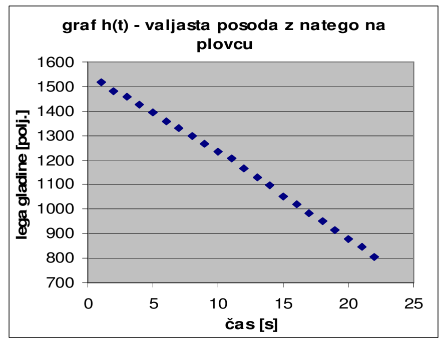
Poskrbeti moramo še za primerno plovno stabilnost (težišče naprave mora biti pod prijemališčem vzgona). K teži naprave moramo prišteti tudi vodo v nategi, ko je ta polna.



Slika 6: Natega na plovcu, ki skrbi za konstanten pretok.

Meritve kažejo, da naprava deluje po pričakovanjih.

Z omenjeno napravo lahko dosežemo konstanten pretok iz posode poljubne oblike. Ali lahko dosežemo tudi enakomerno padanje gladine s časom?



Slika 7: Meritev lege gladine v odvisnosti od časa za valjasto posodo, iz katere izteka voda po nategi s plovcem. Viden je linearen potek, kot je za mehanizem predvideno.

Vemo, da v vsaki časovni enoti izteče enaka količina vode. Da bi to pomenilo enako spremembo višine gladine, mora biti presek posode neodvisen od trenutne višine. To pomeni, da mora biti posoda valjaste oblike.

ZAKLJUČEK

S pretokom vode skozi filter lahko pokažemo nekaj zanimivih fizikalnih zakonitosti, izvedemo nekaj primerjav z zakonitostmi iz drugih področij in zastavimo nekaj vprašanj, na katera lahko dijaki sami odgovorijo z razmislekom in poskusom. Z najosnovnejšo postavitvijo lahko pridemo do napovedi, v katerih primerih se bo višina spreminjala s časom enakomerno, v katerih bo ta krivulja pozitivno in v katerih negativno ukrivljena.

Brez računalniškega zajemanja podatkov je skupinsko delo skoraj nujno, saj mora eden odčitavati višino gladine, drugi pretočeno maso, tretji pa meriti čas. Čeprav se nalogo da postaviti z računalniškim zajemanjem, je morebiti bolje, če se temu izognemo.