Jože Rakovec

Valovanja v ozračju
Dodatki

Dodatek 1 Na kratko o valovanju v treh dimenzijah

Kaj je valovanje, je intuitivno hitro razvidno (npr. na primeru valov na vodi), definicija valovanja pa ni povsem preprosta in enoznačna.
Lahko rečemo, da je val motnja, ki se širi skozi prostor in ki prenaša tudi energijo.
V primeru mehanskih valov lahko tudi rečemo, da se skozi medij širijo perturbacije hitrosti $\vec{v}$.

Valovanje opisuje valovna enačba
v eni dimenziji

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in v treh dimenzijah

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{v},$$

ki pomeni, da so drugi krajevni odvodi valovnih perturbacij povezani z drugim časovnim odvodom perturbacij.

Lastnosti valovanja opisujejo tri osnovne količine:
- **amplituda A**,
- **valovna dolžina λ,**
- **krožna frekvenca ω.**

Valovna dolžina λ
ni vektor, čeprav ima tri »komponente«: (λ_x, λ_y, λ_z), kajti za njegovo velikost velja

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}.$$

Krožna frekvenca ω je odvisna od hitrosti razširjanja valovanja c in od valovne dolžine.

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}.$$

Kadar je pomembna ne samo velikost, temveč tudi smer razširjanja valovanja je najbolje uporabljati namesto valovne dolžine njene recipročne vrednosti - valovna števila

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad l = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad m = \frac{2\pi}{\lambda_z},$$

ki tvorijo **vektor valovnega števila** $\vec{\mu} = (k, l, m)$.

Važno je poudariti, da **fazna hitrost** $\vec{c}$, **ni vektor v smislu** (c_x, c_y, c_z), temveč je ta vektor sorazmeren z $\vec{\mu}$:

$$\vec{c} = \frac{\omega}{\mu^2}\vec{\mu} = \frac{\omega}{\mu^2}\,(k, l, m) = \frac{\omega^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{c_x}, \frac{1}{c_y}, \frac{1}{c_z}\right); \qquad c_x = \frac{\omega}{k}, \quad c_y = \frac{\omega}{l}, \quad c_z = \frac{\omega}{m}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_x^2} + \frac{1}{c_y^2} + \frac{1}{c_z^2}.$$

Krožna frekvenca je produkt valovnega števila za posamezne smeri in faznih hitrosti v posamezne smeri:

$$\omega = kc_x = lc_y = mc_z .$$

Poleg fazne hitrosti je pomembna tudi **grupna hitrost** $\vec{c}_g$,
saj se z njo prenaša energija – pogosto tudi v drugo smer, kot je smer potovanja valov. Grupna hitrost :

$$\vec{c}_g = (c_x, c_x, c_z).$$

Grupna hitrost $\vec{c}_g$ **je vektor**; njegove komponente so:

$$c_{gx} = \frac{\partial\omega}{\partial k}, \quad c_{gy} = \frac{\partial\omega}{\partial l}, \quad c_{gz} = \frac{\partial\omega}{\partial m}.$$

Dodatek 2 Posebnosti glede valovanj v ozračju

Za primer ozračja – medija, ki se skoraj vedno tudi sam premika – lahko tudi rečemo, da val prenaša informacijo in energijo skozi medij s fazno hitrostjo, ki pa je različna od hitrosti gibanja medija samega.

Kadar se tudi medij giblje glede na Zemljo, je s stališča opazovalca na Zemlji treba upoštevati vsoto obeh hitrosti:
premikanja medija $\vec{V} = (U, V, W)$ in fazne hitrosti potovanja valovnih perturbacij $\vec{c}$.
Za opazovalca nekje na Zemlji, ko mimo njega potujejo valovi, je ω tista krožna frekvenca, ki jo zazna.

Za opazovalca, ki se giblje skupaj z zračnimi masami s hitrostjo $\vec{V}$ pa je frekvenca drugačna - tim. »notranja« frekvenca σ:

$$\sigma \equiv \omega - \vec{V} \cdot \vec{\mu}$$

in to je torej frekvenca, ki velja glede na medij.

Podobno velja za fazno hitrost: ta je različna glede na Zemljo in glede na opazovalca, ki se giblje skupaj z ozračjem:

enkrat je

$$\vec{c} = \frac{\omega\vec{\mu}}{\mu^2} = \frac{\omega}{\mu^2}\ (k, l, m),$$

drugič pa

$$\vec{c}_{not} = \frac{\sigma\vec{\mu}}{\mu^2} = \frac{\sigma}{\mu^2}\ (k, l, m).$$

Seveda je podobno tudi glede grupne hitrosti:

$$\vec{c}_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial l}, \frac{\partial\omega}{\partial m}\right)$$

in

$$\vec{c}_{not,g} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}, \frac{\partial\sigma}{\partial l}, \frac{\partial\sigma}{\partial m}\right).$$

Primer: adiabatna hitrost zvoka $\sqrt{\frac{c_p}{c_v}RT}$ (R=R*/M=287 J/kgK) velja glede na zrak, torej je to c_{not} in z njo je povezana σ. Opazovalec, ki miruje, pa zaradi $\vec{V} + \vec{c}$ sliši drugačno frekvenco - ω!
(Dopplerjev efekt.)
Primer: V zmernih geografskih širinah se ozračje giblje pretežno od zahoda proti vzhodu: $\vec{V} = (U, 0{,}0)$. Zato gredo horizontalni transverzalni valovi lahko
“naprej” proti vzhodu, ali “nazaj” proti zahodu, ali pa lahko, če je hitrost razširjanja valovanja po velikosti ravno enaka, po smeri pa nasprotna gibanju samega ozračja $\vec{c}_{not} = -\vec{V}$, valovi “stacionirajo”.

Še nekaj – četudi sta vertikalno in horizontalno dogajanje zelo različni, sta vseeno med seboj močno povezani – tudi pri valovanjih:

- ker je smer grupne hitrosti, ki prenaša energijo, pogosto drugačna od smeri razširjanja valovanja, ter
- ker se zrak giblje brezdivergentno (to pomeni, da pogosto horizontalne perturbacije povzročajo tudi vertikalna kompenzacijska gibanja – in obratno).

Dodatek 3 Uporaba valovnega nastavka

Za analitično reševanje nekaterih parcialnih diferencialnih enačb je uporaben tim. valovni nastavek – že ime pove, da to metoda dobro deluje v primeru valovne enačbe.

Izberemo si neko funkcijo, za katero predpostavimo, da bo enačbo rešila. Ker za valove vemo, da so v njih vzdolž valovne fronte, ki jo v eni dimenziji opisuje funkcija $f(kx-\omega t)$ in v treh dimenzijah funkcija $f(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)$ razmere konstantne ter da so valovi v kraju in v času periodični, je smiselna izbira npr. trigonometričnih funkcij $sin(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)$ ali $cos(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)$ ali njune vsote $Acos(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)+Bsin(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)$, ali pa še bolj splošnega nastavka[1] $Ae^{i(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)}+Be^{-i(\vec{\mu}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

Uporabimo valovni nastavek

$$u=Re\left\{Ae^{i(kx-\omega t)}\right\}$$

na primeru enodimenzijske valovne enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

V valovni enačbi nastopata drugi odvod po času in drugi odvod po kraju. Izračunajmo ju!

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Re\left\{-i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}\right\} \text{ in } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Re\left\{-\omega^2 Ae^{i(kx-\omega t)}\right\}$$

ter

$$\frac{\partial u}{\partial x}=Re\left\{ikAe^{i(kx-\omega t)}\right\} \text{ in } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Re\left\{-k^2 Ae^{i(kx-\omega t)}\right\}.$$

Kaj se ob tem naučimo? Da se s tem nastavkom odvajanje funkcije pretvori v množenje te iste funkcije s kako od količin, ki opisujejo valovanje!

$$\frac{\partial u}{\partial t}\to -i\omega u \text{ in } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to -\omega^2 u \quad\text{ter}\quad \frac{\partial u}{\partial x}\to iku \text{ in } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\to -k^2 u.$$

Če te količine vstavimo v enačbo, dobimo:

$$-\omega^2 Re\left\{-i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}\right\}=c_x^2(-k^2)Re\left\{-i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}\right\}$$

in »po pokrajšanju« dobimo enačbo, ki povezuje ω, c_x in k:

$$-\omega^2=c_x^2(-k^2) \quad\text{ali}\quad c_x=\frac{\omega}{k}.$$

Kadar je fazna hitrost za različna valovna števila k različna, se ti različni valovi širijo različno hitro – pride do **disperzije** valovanja. Zato tudi takšni enačbi rečemo disperzijska enačba za valovanje. Če je valovanje bolj zapleteno, so tudi izhodiščne enačbe bolj zapletene

[1] To pomaga še najbolj tistim, ki imajo težave s pravili za seštevanje ali množenje trigonometričnih funkcij – ker se tega niso naučili v tretji gimnaziji tako trdno, kot so se npr. v drugem in tretjem razredu osnovne šole naučili poštevanke. Avtor tega predavanja je že eden od njih!

in je na koncu tudi disperzijska enačba bolj zapletena. Metoda, po kateri pridemo do nje pa v principu ista: uporabimo valovni nastavek.

Kadar je pomembna tudi advekcija je treba upoštevati

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

V tem izrazu so advekcijski členi nelinearni: npr. u je pomnožen s svojim odvodom $\partial u/\partial x$, torej v nekem smislu sam s seboj. V takem primeru uporaba valovnega nastavka odpove. Rešitev je samo ta, da za advekcijo upoštevamo samo konstantni del toka $U = konst$: $u = U + u'$, advekcijo s krajevno in časovno spremenljivim delom pa zanemarimo:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \approx U\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Sedaj je enačba spet linearna in valovni nastavek daje:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to -i\omega u \ , \ U\frac{\partial u}{\partial x} \to ikUu$$

in torej za linearizirano advekcijo:

$$d/dt = d_l/dt \Rightarrow \qquad \frac{du}{dt} = \frac{d_l u}{dt} \to (-i\omega + ikU)u = -i\sigma u; \qquad \sigma \equiv \omega - kU.$$

Če je treba, orientiramo koordinatni sistem tako, da kaže os x v smer prevladujočega toka in tedaj z gornjim izrazom zajamemo skoraj vso pomembno advekcijo.

Dodatek 4 Izpeljava splošne disperzijske enačbe s konstantnim Coriolisovim parametrom f_0

Dogajanja v ozračju opišemo z najmanj šestimi enačbami za u=dx/dt, v=dy/dt, w=dz/dt, p, ρ in T. V enačbah upoštevamo, da je masni odvod sestavljen iz parcialnega časovnega odvoda in iz advekcijskega dela:

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z},$$
$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z},$$
$$\ldots$$

Seveda je nujno, da upoštevamo, da je naš sistem na Zemlji pospešen – ena od posledic je sistemska Coriolisova sila, druga pa, da je teža vsota gravitacije in radialnega pospeška. Upoštevamo, da se ozračje premika predvsem horizontalno, da je $\vec{V} = (U, V, 0)$ in s tem advekcijo lineariziramo:

$$u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} = U\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + 0,$$
$$u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} = U\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + 0,$$
$$\ldots$$

Enačbe uporabimo v poenostavljeni obliki. Tako npr. predpostavimo hidrostatično ravnotežje, opustimo trenje in druge turbulentne izmenjave, predpostavimo adiabatno dogajanje., uporabimo plinsko enačbo $p = \rho RT$, da se znebimo ene od treh termodinamskih spremenljivk (eliminiramo T). Gostoto, kadar je samo faktor v enačbah obravnavamo kot konstantno. Ni pa konstantna po višini, v členu teže in v kontinuitetni enačbi. Poleg treh gibalnih enačb in kontinuitetne enačbe, ki opisuje spremembe gostote, uporabimo tudi adiabatno energijsko enačbo $dp = \frac{c_p}{c_v} RT\, d\rho$; v njej je $c_z^2 = \frac{c_p}{c_v} RT = \frac{c_p}{c_v} gH = \frac{R}{c_v}\left(\frac{g}{N}\right)^2$ adiabatna notranja hitrost zvoka.

Poleg adiabatne hitrosti zvoka v enačbah nastopajo še drugi »parametri« dogajanja:

$f \equiv 2\Omega sin\varphi$ – Coriolisov parameter (ker smo Rossbyjeve valove že opisali, ga v tem in naslednjem poglavju vzamemo kar konstantnega: $f = f_0$,

g – specifična sila teže,

$\frac{1}{H} \equiv -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$, $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{g}}$ – karakteristična globina medija – ozračja v katerem gostota pada z višino; za izotermno ozračje konstanta,

$N \equiv \sqrt{\frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}} = \sqrt{\frac{R}{c_p}\frac{g}{H}} =$ = – adiabatna Brunt-Väisälina frekvenca vertikalnih oscilacij v ozračju; $\theta = T\left(\frac{p_{00}}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$.

Tako dobimo pet enačb:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + f_0 v,$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} - f_0 u,$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = -\frac{\rho}{\rho_0}g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\rho_0 \nabla\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial t} + U\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + V\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} + w\frac{\partial p_0}{\partial z} = c_z^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)$$

Te enačbe so osnova, iz katere dobimo splošno disperzijsko enačbo, to je zvezo med krožno frekvenco (ali pa fazno hitrostjo) in valovnimi števili. Metodi sta dve: ali iz enačb postopno eliminiramo spremenljivke, ali pa zapišemo pogoj o enolični rešljivosti sistema enačb s tem, da postavimo determinanto koeficientov na nič.

Spremenljivke ustrezno uredimo in za vse uporabimo enak valovni nastavek:

$$u(x,y,z,t) = Re\left[\hat{u}\; e^{i(kx-lx+mz-\omega t)}\right],$$
$$v(x,y,z,t) = Re\left[\hat{v}\; e^{i(kx-lx+mz-\omega t)}\right],$$
$$\ldots$$

S tem preidemo od odvodov na produkte, npr.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Re\left\{-i\omega\;\left[\hat{u}\; e^{i(kx-lx+mz-\omega t)}\right]\right\},$$
$$U\frac{\partial u}{\partial x} = Re\left\{+iUk\;\left[\hat{u}\; e^{i(kx-lx+mz-\omega t)}\right]\right\},$$
$$\ldots$$

in ker v vseh enačbah nastopa člen $e^{i(kx-lx+mz-\omega t)}$, ga lahko »pokrajšamo« in s tem preidemo od sistema parcialnih diferencialnih enačb na sistem linearnih enačb s koeficienti, ki poleg parametrov vsebujejo še valovna števila *k, l, m,* in frekvenco ω in/ali σ

Uporabimo npr. zapis o enolični rešljivosti sistema enačb in pridemo do splošne disperzijske enačbe:

$$m^2\left(\sigma^2 - {f_0}^2\right) + \left(k^2 + l^2\right)\left(\sigma^2 - \sigma N^2\right) = \left(\sigma^2 - {f_0}^2\right)\left[\frac{\sigma^2 - N^2}{c_z^2} - \left(\frac{g}{c_z^2} - \frac{1}{2H}\right)^2\right].$$

Enačba je za σ četrtega reda. Zapišemo ja lahko na razne načine, npr. tudi z vertikalnim valovnim številom na levi strani enačbe.

$$m^2 = \frac{N^2-\sigma^2}{\sigma^2-f_0^2}(k^2+l^2) + \frac{\sigma^2-N^2}{c_z^2} - \left(\frac{g}{c_z^2} - \frac{1}{2H}\right)^2.$$

Ta enačba opisuje lastnosti vseh valov, ki so pomembna v ozračju. Če so vsi koeficienti konstantni, vključno z f, pa z njo ne moremo zajeti Rossbyjevih valov, za katere je bistveno, da Coriolisov parameter ni konstanten, temveč se spreminja z geografsko širino.

Če se zanimamo samo za vremensko pomembna valovanja, potem je za vsa od njih $c \ll c_z^2$ in $\frac{1}{c_z^2} \to 0$, zato lahko člena s c_z^2 v imenovalcu zanemarimo. Tako ostane:

$$m^2 = \frac{N^2-\sigma^2}{\sigma^2-f_0^2}(k^2+l^2) - \frac{1}{4H^2}$$

ali

$$\left(m^2 + \frac{1}{4H^2}\right)(\sigma^2 - f_0^2) = (k^2+l^2)(N^2-\sigma^2).$$

Izračunajmo notranjo krožno frekvenco:

$$\sigma^2 = N^2 \frac{k^2+l^2}{k^2+l^2+m^2+\frac{1}{4H^2}} + f_0^2 \frac{m^2+\frac{1}{4H^2}}{k^2+l^2+m^2+\frac{1}{4H^2}}$$

Deli zraka valujejo gor-dol s frekvenco N, pa tudi sem-tja s frekvenco f. O tem, kaj prevlada določata »uteži« pri N^2 in pri f_0^2 oz. njuno razmerje. Uteži pa sta obratno sorazmerni s kvadratoma valovnih dolžina po horizontali in po vertikali: $k^2 + l^2 = (2\pi/\lambda_{hor})^2$, $m^2 = (2\pi/\lambda_{vert})^2$. (Člen $1/2H$, ki je posledica zmanjševanja gostote z višino, pa igra vlogo »popravka« pri vertikalnem valovnem številu m: npr. za ohranitev masnega toka po vertikali mora biti pri zgoraj, pri nižji gostoti, vertikalna hitrost večja, če naj se tam prenaša enaka masa, kot spodaj, kjer je gostota večja).

$$\sigma^2 \propto \frac{N^2}{\lambda_{hor}^2} + \frac{f_0^2}{\lambda_{vert}^2}.$$

Dodatek 5 Izpeljava disperzijske enačbe za Rossbyjeve valove v zmernih geografskih širinah s Coriolisovim parametrom $f = f_0 + \beta y$

Če je tok geostrofski ($u = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $v = +\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}$), potem je vrtinčnost ζ

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)u = \frac{1}{f}\nabla^2 \Phi + \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{1}{f_0}\nabla^2 \Phi + \frac{1}{f_0^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Prvi člen je velikokrat tudi za dva velikostna reda večji od prvega.

$$\zeta \approx \frac{1}{f_0}\nabla^2 \Phi.$$

Pri vrtinčnosti zaradi vrtenja Zemlje je bistveno, da se spreminja z geografsko širino, vendar pa to odvisnost poenostavimo: namesto $f = 2\Omega \sin\varphi$ vzamemo kar

$$f = f_0 + \beta y,$$

pri čemer je v zmernih geografskih širinah $\beta \approx 2 \cdot 10^{-11} s^{-1} m^{-1}$.

Izračunati moramo časovni odvod vsote $\zeta + f$, pri tem pa je pomembno upoštevati tudi advekcijo. Glede ζ pri advekciji upoštevamo samo advekcijo s hitrostjo splošnega zahodnika $(U, 0,0)$: $\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta$. Pri odvajanju f po času pa je od nič različen samo člen advekcije po meridionalni smeri: $\frac{df}{dt} = v\frac{\partial f}{\partial y} = v\beta = \frac{\beta}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Skupaj torej:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{f}\nabla^2 \Phi\right) + \frac{\beta}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Z dvodimenzionalnim valovnim nastavkom

$$\Phi = Re\left\{Ae^{i(kx + ly - \omega t)}\right\}$$

se lotimo te diferencialne enačbe!

Spomnimo se:

enkratno odvajanje po t prinese množenje z $-i\omega$,
enkratno odvajanje po x prinese množenje z ik,
dvakratno odvajanje po x prinese množenje z $-k^2$ oz. v dveh dimenzijah z $(-k^2 - l^2)$.

Torej dobimo

$$Re\left\{(-i\omega + Uik)\left[\frac{1}{f}(-k^2 - l^2)\right]\widehat{\Phi} + \frac{1}{f_0}ik\beta\widehat{\Phi}\right\} = 0.$$

Ko »pokrajšamo« i, $\frac{1}{f_0}$ in $\widehat{\Phi}$, ostane:

$$(-\omega + Uk)[(k^2 + l^2)] - k\beta = 0$$

ali

$$(\omega - Uk) = \sigma = \frac{-k\beta}{(k^2+l^2)}.$$

Notranja frekvenca σ je torej

$$\sigma = \frac{-k\beta}{(k^2+l^2)},$$

frekvenca za opazovanje glede na Zemljo pa:

$$\omega = Uk - \frac{k\beta}{(k^2 + l^2)}.$$

Notranja fazna hitrost je

$$c_{x,not} = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{(k^2 + l^2)}$$
$$c_{y,not} = \frac{\sigma}{l} = -\frac{k}{l}\frac{\beta}{(k^2 + l^2)}.$$

Ker je l po navadi manjši od k, lahko pri zonalni fazni hitrosti l^2 zanemarimo v primerjavi s k^2 in dobimo za zonalno komponento:

$$c_{x,not} \approx -\frac{\beta}{k^2}.$$

Dodatek 6 Enačbe za ekvatorialne valove

V enačbah iz poglavja 3.1 je potrebno upoštevati tudi odvisnost f od geografske širine – saj npr. f čez ekvator celo zamenja predznak: $f = \beta y$!

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + \beta y v,$$
$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} - \beta y u,$$
$$\frac{d\mathrm{w}}{dt} = -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z}$$
$$\frac{d\mathrm{\rho}}{dt} = -w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}$$
$$\frac{d\mathrm{p}}{dt} = -w\frac{\partial p_0}{\partial z} + c_z^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}$$

To je pet enačb za pet neznank in lahko bi že na teh uporabili valovni nastavek. Raje pa sistem enačb še malo poenostavimo.

Tretjo enačbo še enkrat odvajamo po času in iz zadnjih treh enačb eliminiramo valovne fluktuacije gostote ρ (in ob tem upoštevamo, da je $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g\ \ \partial \rho_0/\partial z = \rho_0/H$ in $1/c_z^2 \ \rightarrow 0$, pa dobimo štiri enačbe:

$$\frac{d\mathrm{u}}{\partial t} - \beta y v + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d\mathrm{v}}{\partial t} + \beta y u + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{2H} = 0,$$
$$N^2 w + \frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{p}{2H}\right) = 0.$$