PRESENEČENJA V FIZIKI:
OPAZOVANJE PRESENETLJIVIH POJAVOV
S PRIROČNIMI NAPRAVAMI

Mitja Rosina

15. decembra 2006

Vsebina predavanja:

Mnoge zanimive pojave lahko opazujemo in pomerimo s priročnimi sredstvi. Pokazal bom nekaj zgledov, ki naj vzpodbudijo iznajdlivost učiteljev in dijakov. Marsikdaj se da dijake napeljati k neposredni razlagi pojava, zlasti če se da fizikalne količine vsaj približno izmeriti.

Zgledi

1. **Stabilno ravnotežje**. Kako daleč lahko sega kupček kart preko roba mize? Dolžina karte je ℓ, njihovo število pa n. Nariši skico, kako leži težišče zgornjih ν kart ravno na robu $\nu + prve$ karte.

$$L = \frac{\ell}{2}\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}) \approx \frac{\ell}{2}\,(\ln n + \gamma), \qquad \gamma = 0,57722.$$

   Za $n = 10$ dobiš $L = 1.46\,\ell$ (približek bi dal $L \approx 1.44\,\ell$).

   Poskušal sem s kartami taroka. Dosegel sem seveda malo manj, $L = 1.37\,\ell$. Za poskus z 52 kartami pa je potrebno precej potrpljenja.

2. **Stabilno ravnotežje – verižnica.** Na obeh koncih obešena vrvica ali veriga zavzame obliko “verižnice” (hiperbolične funkcije)

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}.$$

   Pri tem je a krivinski radij verižnice pri dnu. Določimo ga iz višine verižnice (od dna do pritrdišč) $y_0 = a(\mathrm{ch}(x_0/a) - 1)$, ali pa iz dolžine verige $2s_0 = 2a\mathrm{sh}(x_0/a))$, pri čemer je $2x_0$ razpon med koncema verižnice. Izpeljavo glej v Prilogi.

   Preveri takšno obliko! Z računalnikom nariši verižnico, papir postavi navpično in zraven na dveh koncih drži vrvico ali verižico!

3. **Stabilno ravnotežje – princip oboka.** Veriga obešena na obeh koncih je v stabilnem ravnotežju, zavzame lego, ki ima najnižjo potencialno energijo. Če verigo v obliki verižnice “postavimo na glavo”, bo v labilnem ravnotežju, imela bo maksimalno potencialno energijo in se bo takoj zrušila. Zakaj se pa potem obok ne zruši? Zato, ker so kamni široki in oblikovani s trapezastim prerezom. Če želimo en kamen premakniti

navzdol, ga moramo nekoliko zasukati in se morajo sosednji nekoliko pomakniti navzgor, kar stane energijo. Vsaj nekaj energije moramo dovesti, da se kamni začnejo rušiti. Tako ravnovesje imenujemo metastabilno.

Če ima obok obliko obrnjene verižnice, se opira samo spodaj. Če pa imamo navpične stene s polkrožnim obokom na vrhu (ki je ponavadi še obremenjen), moramo stene podpreti od strani, da jih sile ne razmaknejo narazen (glej zunanje podpore pri romanskih in gotskih cerkvah!).

Sestavi iz primernih kamenčkov ali kosov lesa obok.

Še bolj zanimivo je sestaviti kupolo iz snega (iglu) ali majhno kupolo iz mivke. Iz suhe mivke napravi grič visok kakih 30 cm. pokrij ga s plastično folijo in nato s plastjo mokre mivke. Ko se po nekaj urah mivka posuši, lahko izpodkoplješ spodnjo suho mivko in odstraniš folijo. Tako narejena kupola je neverjetno trdna. Princip izpodkopavanja so v antiki marsikje uporabili.

Pripomba: Konstrukcija iz vrvi (npr. pri visečem mostu) je obremenjena na nateg. Če jo postavimo na glavo, so obremenitve na tlak, primerne za stebre in drogove pri mostu na stebrih. Ta princip uporabljajo pri "obrnjenih" modelih mostov, saj je vrvne konstrukcije laže sestaviti.

4. **Trenje navite vrvice.** Če vrvico naviješ na kolut, lahko uravnovesiš veliko utež z zelo majhno utežjo na drugi strani:

$$F_2 = F_1 \, \mathrm{e}^{-k\varphi} \, .$$

Če vrvica drsi, je k koeficient trenja in φ kot, ki ga pokriva vrv (pri n navojih je kot $\varphi = 2n\pi$). Če vrvica ravno še miruje, pa je k koeficient lepenja. Izpeljavo glej v Prilogi.

Preizkušaj to zvezo z različnimi števili navojev! Presenečen boš, kako majhna protisila je včasih potrebna. Zanimivo je, da je v idealnem primeru sila odvisna samo od kota (števila navojev) in nič od radija; dejanjsko pa se vrvica na hujših krivinah ali robovih nekoliko deformira in se lahko koeficient lepenja spremeni.

5. **Površinska napetost – zakaj žiletka plava?** Če žiletko z dolžino a in širino b previdno položiš na vodo v skodelici, plava. Lahko jo celo nekoliko obremeniš. Plava predvsem zaradi tlaka pod žiletko (zaradi vzgona $F_{\mathrm{vzgon}} = \rho g h \, a \, b$). Površinska napetost prispeva le manjši delež ($F_{\mathrm{pov}} = \sigma \, (2a + 2b)$). Površinska napetost pa je bistvena, da voda ne vdre nad žiletko. Idealno zdrži globino

$$h_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}},$$

kar da točen račun, ki upošteva obliko zakrivljene površine.

Isti rezultat dobimo s kvalitativnim razmislekom. Površinska sila na namišljeno črto z dolžino a ($F_{\mathrm{pov}} = \sigma a$) mora zdržati vlek zaradi tlaka vode ($\rho g (h/2) \, ha$).

Iz maksimalne globine torej lahko ocenimo površinsko napetost. Za vodo ($\sigma = 0,07$ N/m) je približno $h_{\max} \approx 3,6$ mm. Obremenitev žiletke velikosti $a = 3$ cm, $b = 2$ cm je torej največ $F_{\text{vzgon}} = \rho g h\, a\, b = 0,02$ N (F_{pov} smo zanemarili).

6. **Perkolacija.** V pravokotno škatlo nasuj na dno mešanico kovinskih in steklenih kroglic. Zloži jih v pravokotno (ali pa v trigonalno) mrežo, tako da je dno ravno napolnjeno. Na nasprotni ploskvi škatle daj kovinski plošči in ju zveži preko baterije in žarnice, tako da bo žarnica svetila, če množica kroglic prevaja (če so kovinske kroglice sklenjene v verigo). Govorimo o perkolaciji. Verjetnost za perkolacijo je odvisna od geometrije škatle in od razmerja med številom prevodnih in neprevodnih kroglic. Poskusi z različnimi razmerji in nariši diagram, kolikokrat pri danem razmerju sistem perkolira. Če si dober v računalništvu, lahko poskus tudi simuliraš z računalnikom.

Če je škatla kvadratasta in delež prevodnih kroglic 50%, pokaže preprost razmislek, da je verjetnost za perkolacijo 50%. Če so prevodne kroglice sklenjene, so neprevodne prekinjene, in obratno. Z zamenjavo prevodnih in neprevodnih kroglic dobimo iz ene situacije drugo. Zaradi simetrije sta torej obe situaciji enako verjetni! To velja za pravokotno mrežo, za trigonalno velja le približno, ker vodoravne in navpične vrste niso enake. Če zmanjšamo delež prevodnih kroglic pod 50%, verjetnost za perkolacijo hitro pade proti nič (račun pa je bistveno bolj kompliciran).

V literaturi (*glej GOOGLE: Perkolacija*) so pogosti zgledi, ko nas zanima verjetnost perkolacije od izhodiščne točke v daljavo. V tem primeru je pod kritičnim deležem prevodnih kroglic $p_c = 1/2$ verjetnost za perkolacijo skrajno majhna, nad kritičnim p_c pa hitro narašča proti 1. To velja za pravokotno mrežo, kjer ima vsaka kroglica 4 sosede. Pri heksagonalni razporeditvi (satje – 3 sosedi) je $p_c = \sin(\pi/18) = 0.826$, pri trigonalni (6 sosedov) pa je $p_c = 1 - \sin(\pi/18) = 0.174$.

Zanimiv zgled so gozdni požari. Če so drevesa dovolj na redko, se požar nekje ustavi (ne perkolira), če so na gosto, pa zajame ves gozd.

PRILOGA

2. *Izpeljava verižnice.* Upoštevajmo, da je dolžina loka po Pitagorovem izreku $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, $\quad \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$, kjer je $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ strmina krivulje. Vodoravna komponenta sile, s kater desni konec vrvi v točki x vleče levega, je konstantna, $F_x = konst$, saj na vrv ne deluje teža v smeri x in čuti vsak košček vrvi (nasprotno) enako vodoravno silo od obeh sosedov. Pač pa deluje na enoto dolžine vrvi razlika navpičnih sil sosednjih koncev ter teže

$$F_y(x + \mathrm{d}x) - F_y(x) - f\,\mathrm{d}s = 0,$$

kjer je $f = S\rho g$ (presek $\times$ gostota $\times$ pospešek prostega pada). Sledi

$$\frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}s} = f, \qquad F_y = fs,$$

kjer smo šteli lok s od koordinatnega izhodišča $x = 0$ na dnu verižnice. Ker je vrv obremenjena le na nateg, kaže sila v smeri tangente, za komponenti potem velja $F_y/F_x = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ in dobimo diferencialno enačbo (če vpeljemo $a = F_x/f$)

$$F_x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}x} = f\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

$$F_x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f\sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}.$$

Rešitev oblike $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ lahko uganemo, če upoštevamo, da je d ch/dx=sh, d sh/dx=ch in 1+sh^2=ch^2.

Metodično pa bi vpeljali $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u$, $F_x/f = a$ in bi dobili rezultat z integracijo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{a},$$

$$x = a\,\mathrm{Arsh}(u), \quad u = \mathrm{sh}(x/a), \quad y = a\,\mathrm{ch}(x/a).$$

4. *Izpeljava sil pri naviti vrvici.* Vrvica je v točki z "geografsko dolžino" φ napeta s silo $F(\varphi)$, ki jo vleče skoraj enako na obe strani. Rezultanta sil na majhnem loku vrvice $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$ je $F\,\mathrm{d}\varphi$ (skiciraj!) in je pravokotna na podlago. Sila trenja na ta košček vrvice je potem $\mathrm{d}F_{tr} = k\,F\mathrm{d}\varphi$, kjer je k koeficient trenja. Sila F se zato manjša v obratni smeri drsenja

$$\mathrm{d}F = -k\,F\mathrm{d}\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi} = -k\,F\,.$$

Rešitev te diferencialne enačbe pa je $F(\varphi) = F_1\exp(-k\varphi)$.