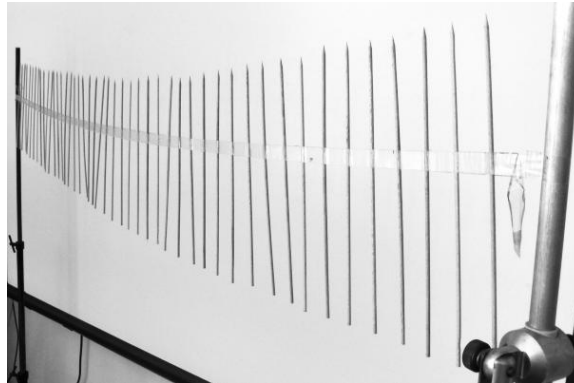


Potovanje vala na valovniku iz palčk za ražnjiče

Sergej Faletič
sergej.faletic@fmf.uni-lj.si

Povzetek

Valovi na valovniku, ki palčk nima vpetih v težišču potujejo na neobičajen način. Razlog je, da je na takem mediju hitrost lepega, sinusnega vala odvisna od njegove frekvence. Temu pojavu pravimo *disperzija*. Vprašanje se glasi, kako naj na takem mediju določimo hitrost motnje, ki ni sinusna (npr. enega sunka). Videli bomo, da imamo dve hitrosti, ki sta različni. Ogledali si bomo tudi, kaj je na takem valovniku drugačnaga, da se disperzija pojavi in spoznali še druge sisteme, kjer se iz istega razloga pojavi disperzija.



Slika 1. Valovnik iz paličic za ražnjiče.

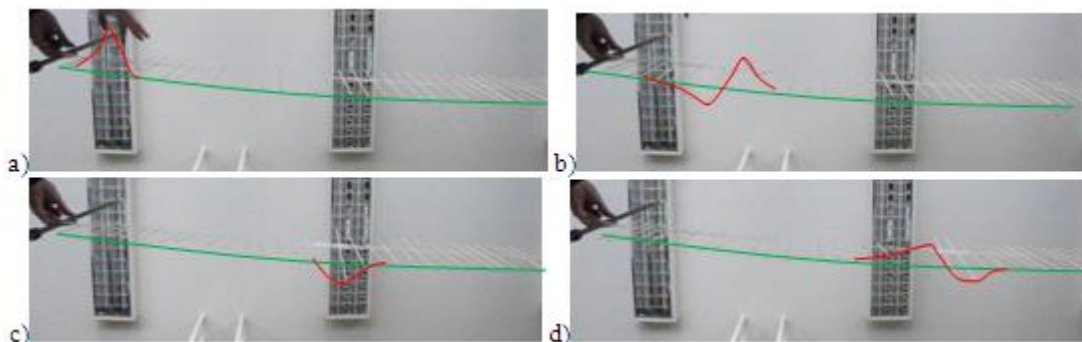
Opazovalni poskus

Na valovniku ustvarimo eno motnjo (sunk) in opazujemo, kako potuje po mediju. Opazimo, da potuje kot običajno, a amplituda se prestavlja z ene strani na drugo. Zastavimo si vprašanje, kako določiti hitrost potovanja motnje. Spremljali bomo rezultate ene skupine.

- (1) Prva misel je, da merimo čas potovanja motnje z ene strani na drugo. To lahko naredimo s štoparico, a to ne bo dovolj natančno, da bi na dolžini valovnika opazili razlike, o katerih bomo govorili. Napaka štopanja je približno enaka reakcijskemu času človeka, ki je 0,2s. Pri našem poskusu pa bodo rezlike v časih manjše. Zato si pomagajmo s kamero. Posnamemo potovanje pulza in si ga predvajamo po slikah. Izmerili smo dolžino 0,97m in čas 1,4s. Pri 30fps (fps - slike na sekundo) imamo natančnost 0,03s, kar je približno 2%. To nam da hitrost $(0,69 \pm 0,02)\text{m/s}$.

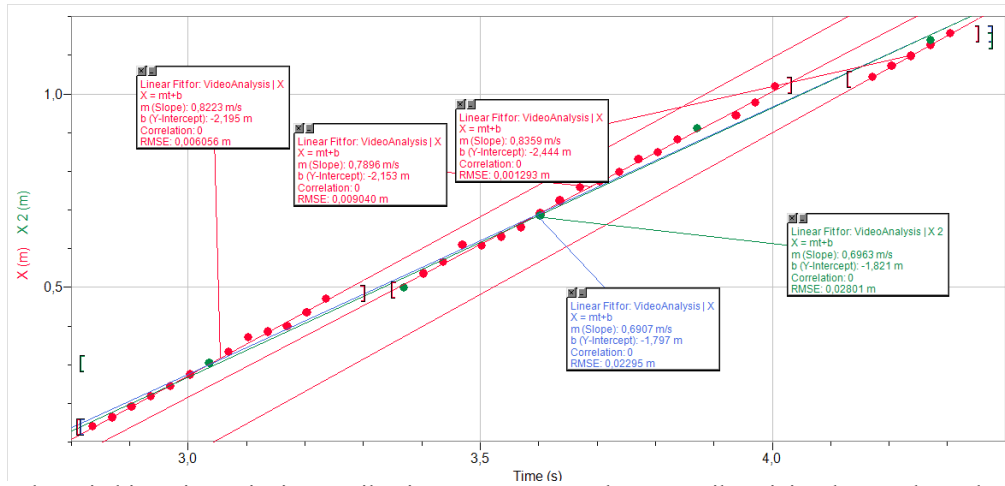
Ta meritev je narejena iz samo dveh točk, kar ni najboljše. Zato razmislimo o drugih možnostih.

- (2) Običajno si hitrost valovanja predstavljamo kot hitrost potovanja enega vrha. S programom Logger pro lahko spremljamo potovanje vrha na posnetku in na vsaki sliki označimo njegovo lego. Opazimo, da čez čas vrh izgine, namesto njega pa se pojavi dolina (slika 2c). Prav tako postopoma dolina izgine in namesto nje se pojavi nov vrh. Če tako izmenično spremljamo potovanje vrha in doline, lahko za vsakega posebej določimo hitrost iz naklona garfa $x(t)$.



Slika 2. Na slikah od a) do d) se po vrsti vidi, kako motnja spreminja obliko. Najprej imamo vrh (a), nato za vrhom začne nastajati dolina (b). Ob nekem času vrh popolnoma zamenja dolina (c). Nato začne ponovno počasi nastajati vrh (d).

Opazimo, da je graf sestavljen iz več odsekov (slika 3, rdeče). Vsakič, ko se zamenjata vrh in dolina, nastane pri potovanju kratek premor. Strmina vsakega od odsekov nam je dala hitrosti 0,82m/s, 0,79m/s in 0,84m/s. Te vrednosti lahko zapišemo kot $(0,82 \pm 0,02)\text{m/s}$. Vidimo, da je naša prva ocena hitrosti, $(0,69 \pm 0,02)\text{m/s}$, izven tega intervala.



Slika 3. Določanje hitrosti. Merjenje premikanja posameznega vrha nam prikazujejo rdeče točke, zelene pa grobo pozicijo celotne motnje. Rdeče črte so fiti posameznih ekstremov. Modra črta je fit vseh rdečih točk hkrati, zelena pa je fit samo zelenih točk.

Vidimo, da nam hitrosti določene pri (2) ne bodo v veliko pomoč pri napovedi, kje bo pulz čez, denimo, pol ure, ali koliko časa bo potreboval, da prepotuje, denimo, 100m. Že če poskusimo s to hitrostjo napovedati, koliko časa bo potreboval do konca valovnika, zgrešimo za 0,2s. Čas prepotovanja 0,97m bi bil pri tej hitrosti 1,2s. Pri (1) pa smo izmerili 1,4s. Ta razlika (okoli 16%) je precej izven obsega merske napake (okoli 3%). Opazimo, da hitrost potovanja motnje kot celote in hitrost potovanja posameznega vrha nista isti.

- (3) Kot tretji način določanja potovanja motnje izberimo to, da ob različnih časih, več slik narazen, pogledamo, kje se motnja nahaja. Ne glede na to, ali gre za vrh ali dolino, lahko na posnetku vidimo, kje je medij najbolj deformiran. Označimo nekaj teh točk (zeleno na sliki 3). Premica skozi te točke nam da naklon 0,70m/s, kar je skladno z oceno pri (1). Prav tako lahko potegnemo premico skozi vse točke, ki smo jih označili pri (2) hkrati (modra črta na sliki). Tudi ta naklon je 0,69m/s. (Številke se ne vedno tako lepo ujamejo, a pri vseh dosedanjih poskusih, razen enem, je bilo odstopanje med hitrostima okoli 15% - bistveno več kot nezanesljivost posamezne meritve, ki je bila vedno nekje do 3%.

Imenovanja

Sedaj, ko smo spoznali pojav, videli v čem je težava in ugotovili, da potrebujemo dve hitrosti pri opisu takega valovanja, je čas, da ju poimenujemo. Hitrosti gibanja posameznega vrha ali doline pravimo *fazna hitrost*, hitrosti potovanja celotne motnje, ki je tista, s katero lahko napovemo, kje bo motnja po daljšem času, pa pravimo *grupna hitrost*. Ta je vedno manjša od fazne. Grupna in fazna hitrost se razlikujeta samo na medijih z disperzijo.

Fizikalni mehanizem

Opazovanje

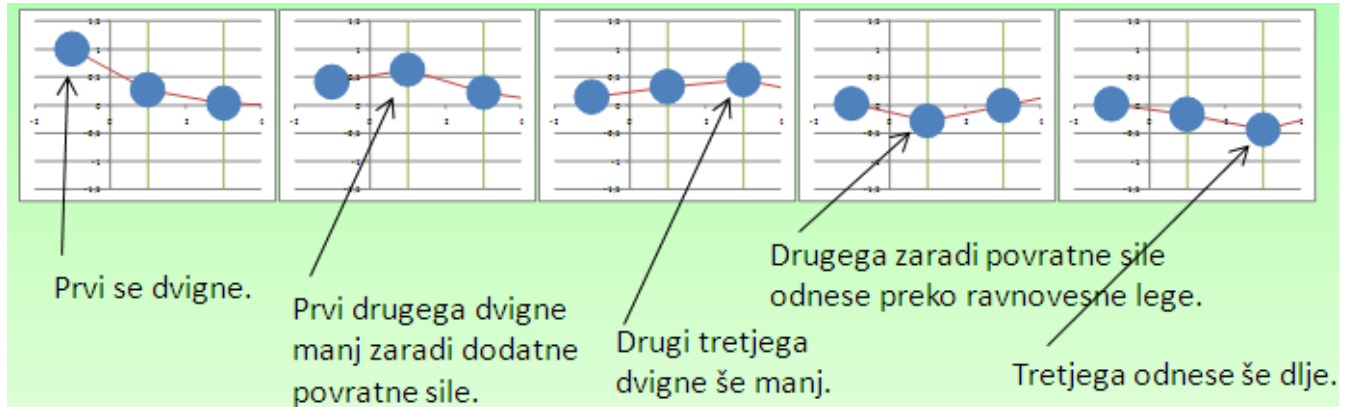
Opazujmo najprej, kaj je na tem valovniku drugačnega kot na drugih.

- (1) Najprej opazimo, da je postavljen navpično. Ugotovimo, da je to zato, ker paličice niso vpete v težišču.
- (2) Ker paličice niso vpete v težišču, se vsaka od njih okoli točke vpetja obnaša kot nihalo. Vsako nihalo pa ima svojo *lastno frekvenco*. Običajni valovnik ima paličice vpete v težišču, tako da nimajo lastne frekvence.

Mehanizem in opis oblike iz opazovanj

Najprej si poenostavimo opis. Pri paličicah imamo opravka z vztrajnostnimi momenti in navori. Lažje si je predstavljati enak sistem s silami in masami. Tak sistem je veriga iz vzmeti in uteži, ki je prečno vpete z elastikami. Pri takem sistemu imamo prav tako najprej medij, ki valuje (verigo iz vzmeti in uteži) in na to dodana še lastna nihanja vsake uteži zaradi prečnih elastik.

Z računalniško simulacijo lahko upočasnjeno spremljamo, kaj se dogaja in kakšne sile delujejo na eno utež. V prvem približku si predstavljamo takole: sile zaradi motnje premaknejo eno utež iz ravnovesne lege do amplitude in jo nato vrnejo v ravnovesno lego. Potemtakem domnevamo, da bo dodatna povratna sila povzročila, da jo dvignejo manj kot do amplitude, hkrati pa bo ta sila, kot pri vsakem nihalu, povzročila, da bo utež zanihala okoli ravnovesne lege, torej se vsaj malo premaknila na drugo stran ravnovesne lege. Če zdaj za naslednjo utež privzamemo, da bo njeno gibanje samo zaradi motnje enako kot prejšnje uteži, torej do malo manj kot amplitude in potem vsaj malo na drugo stran, lahko domnevamo, da bo povratna sila povzročila, da se bo ta utež premaknila do še manjše amplitude kot prejšnja, hkrati pa, ker je že prejšnja malo prekoračila ravnovesno lego, ta ravnovesno lego prekoračila še bolj. Če ta proces nadaljujemo, prej ali slej pridemo do stanja, ko se neka utež premakne le še v nasprotno smer. To pa je enako, kot pri prvi uteži, ki se je premaknila samo v prvotno smer. Zato smemo domnevati, da se bo proces ponovil in bomo prej ali slej prišli do stanja, ko bo premik le še v prvotni smeri. In tako dalje.



Slika 4. Na sliki je prikazan kvalitativen opis mehanizma, ki povzroča nastanek doline za vrhom.

Oglejmo si še, kdaj nastane ta nasprotni premik. Prva utež drugo najprej dvigne, šele nato jo kombinacija sil požene preko ravnovesne lege. Torej dolina začne nastajati po vrhu. Ta zamik med vrhom in dolino prinese opažen zaostanek med prvim vrhom in prvo dolino in potem med prvo dolino in drugim vrhom itd. Ta zaostanek pa prinese grupno hitrost manjšo od fazne.

Formalni opis

Naš sistem je pravzaprav sistem sklopljenih nihali. Vsaka paličica valovnika je vpeta izven težišča, zato teža povzroča povratno silo, zaradi katere je vsaka paličica nihalo z neko lastno frekvenco. Pri običajnem valovniku temu ni tako, ker so vse paličice vpete v težišču. Ta dodatna sila spremeni (d'Alambertovo) valovno enačbo

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

v t.i. Klein-Gordonovo enačbo (Mouchet 2008, Bertozzi 2010, Gravel et al. 2011)

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{dK}{dx} y = \frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Malo se spomnimo, kaj členi v enačbi predstavljajo. Najlažje je mogoče razmišljati o napeti struni. Deli mase strune so ekvivalentni paličicam, elastičnost strune lepilnemu traku in videli bomo kaj je ekvivalentno gravitacijskemu polju, ki povzroča povratno silo. Pri napeti struni je T sila, s katero je struna napeta, dm/dx je dolžinska gostota strune (dm je masa majhnega dela strune, dx pa dolžina tega istega dela. V diskretni različici iz vzmeti in uteži je dm masa ene uteži (vztrajnostni moment paličice), dx pa razdalja med utežmi (paličicami)). Napetost T skrbi za prenos vala po mediju. Brez T je pospešek posameznega dela nič. T tako lahko imenujemo sklopitev. Pri torzijskem nihanju je povezan s torzijskim koeficientom torzijske vzmeti (žice), pri nas je povezan s selotejpmom. Drugi člen na levi bi potem predstavljal silo (na dolžinsko enoto), ki je sorazmerna z odmikom in nasprotno usmerjena. Pri našem valovniku je K povezan z gravitacijskim poljem, g , ki vrača paličice v ravnovesno lego (v resnici gre za navor teže deljen z odmikom, y). Na struni iz vzmeti in uteži bi tako silo npr. povzročala vzmet, s katero bi bil del mase (vsaka utež) vezan na ravnovesno lego (npr. dodamo vzmet vezano na zunanji okvir, ali dve vzmeti, kot za vzmetno nihanje vozička). Tedaj bi bil dK koeficient te vzmeti.

Disperzijska zveza

Disperzijsko zvezo dobimo tako, da v enačbo vstavimo eno od rešitev, npr.

$$y = y_0 \cos(kx - \omega t + \delta)$$

Po dvojnem odvajanju po x in po t dobimo

$$-Ty_0k^2 \cos(kx - \omega t + \delta) - \frac{dK}{dx} y_0 \cos(kx - \omega t + \delta) = -\frac{dm}{dx} y_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t + \delta)$$

Hitro vidimo, da se $\cos(kx - \omega t + \delta)$ pokrajša in ostane (po množenju z (-1))

$$Tk^2 + \frac{dK}{dx} = \frac{dm}{dx} \omega^2$$

Ker imamo občutek, da Tdx/dm nekaj pomeni, dK/dm pa tudi, množimo enačbo z dx/dm . Tako dobimo

$$\frac{Tdx}{dm} k^2 + \frac{dK}{dm} = \omega^2$$

Zdaj v Tdx/dm prepoznamo kvadrat hitrosti valovanja na običajni vrvi, c_0 , v dK/dm pa kvadrat lastne frekvence vzmetnega nihala, ki jo bomo označili z ω_1 . To je v diskretnem primeru frekvenca nihanja ene uteži, v našem primeru valovnika pa ene paličice. Tako dobimo disperzijsko zvezo

$$c_0^2 k^2 + \omega_1^2 = \omega^2$$

Z vpeljavo fazne hitrosti

$$c_f = \frac{\omega}{k}$$

dobimo

$$c_f = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \omega_1^2 / \omega^2}}$$

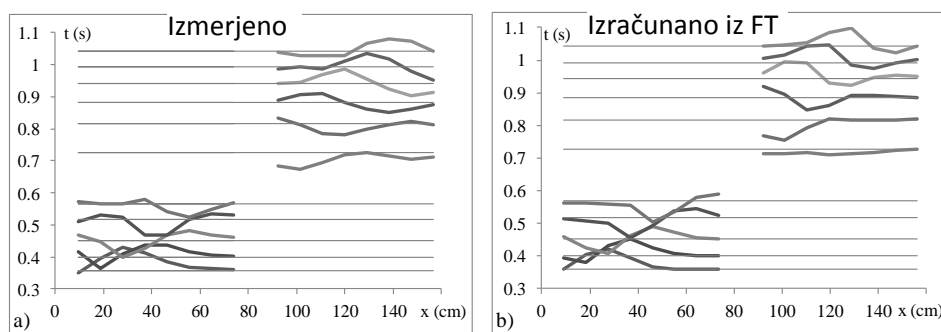
Mogoče nam več pove izraz za valovno število

$$k = k_0 \sqrt{1 - \omega_1^2 / \omega^2}$$

Vidimo, da bo za vsako frekvenco k kvečjemu večji od k_0 . k_0 je valovno število, ki ga dobimo, če vstavimo $\omega_1=0$. To je, ko paličice nimajo lastne frekvence. Vidimo tudi, da je k lahko imaginaren. Teh primerov tokrat nismo obravnavali.

Opis oblike vala

Motnjo, ki ni popoln sinus, lahko sestavimo iz množice popolnih sinusov. To poznamo kot *Fourierjevo transformacijo*. Ko enkrat imamo množico popolnih sinusov, lahko za vsakega izračunamo, kako se premika. Vsak s svojo hitrostjo, ki je za različne frekvence različna. Po izbranem času ponovno pogledamo superpozicijo vseh sinusov in tako dobimo obliko vala ob tem času. Če bi se komponente z vsemi frekvencami gibale enako hitro, torej, če ne bi bilo disperzije, bi se v danem času vsi valovi enako premaknili in oblika motnje bi bila enaka kot na začetku. Ker pa se ne premikajo z isto hitrostjo, se po nekem času seštejejo malo drugače. To spremeni obliko motnje. Rezultat ene takih obravnav je na sliki ???. Opazne so majhne razlike med izmerjeno in izračunano obliko, a kvalitativni opis je skladen.

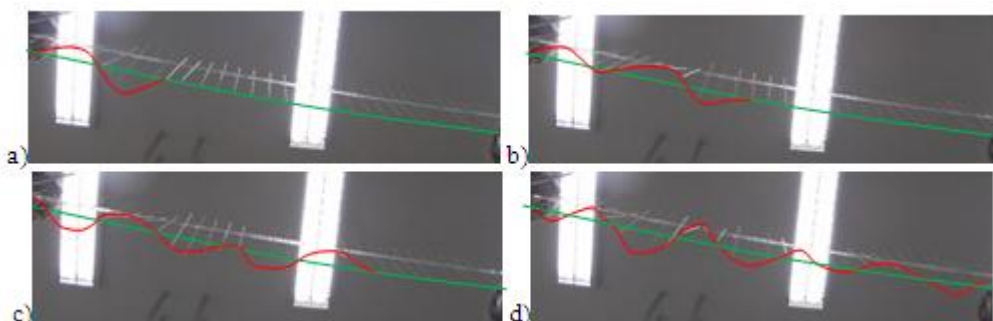


Slika 5. Na sliki (a) je prikazana oblika pulza pri enem od poskusov iz preteklosti. Na desni je oblika izračunana tako, da smo obliko pulza najprej Fourierjevo transformirali, nato izračunali obliko vsake komponente ob kasnejšem času, nazadnje pa komponente nazaj seštel. Vidne so manjše razlike v hitrostih, a kvalitativno sta obliki zelo podobni.

Opozoriti velja, da so posamezni čisti sinusi neskončni. To je fizikalno težko razumljivo, da lahko povsem lokalizirano motnjo opišemo z množico neskončnih motenj, ki so na koncu v trenutku, ko pulz ustvarimo. Odgovor je v superpoziciji teh motenj, saj se seštejejo v nič že zelo blizu pulza. To je točno res samo, če jih je neskončno mnogo. Lahko bi si komponente predstavljali kot sinuse, ki imajo nekje začetek, a taki 'sinusi' niso pravi sinusi, zato ne potujejo kot čisti sinusi. Kako potuje sinus, ki ima začetek, je prikazano in opisano spodaj.

Gibanje vala, ki ima začetek

Val, ki ima začetek, tudi če je po začetku popolnoma sinusen, v celoti ni sinusen. Sinus je neskončna periodična funkcija in nima začetka. Tudi tak val bi se dalo razstaviti na Fourierjeve komponente. Spekter bi imel vrh pri frekvenci sinusa, a bi imel prisotne tudi druge komponente, ki bi prispevale to, da je pred začetkom sinusa amplituda nič. Lažje kot tak abstrakten opis pa je, če si preprosto pogledamo, kako potuje prvi vrh sicer sinusne motnje.



Slika 6. Če ustvarimo (približno) sinusen val, vidimo, da se njegov prvi vrh obnaša zelo podobno kot pulz. Na sliki (a) imamo najprej dolino, do slike (c) dolina izgine in ostane samo vrh za njo. Do slike (d) tudi vrh že izgine in ostane dolina za njim.

Na sliki 6 je prikaz zaporednih sličic take motnje. Vidimo, da se prvi vrh obnaša podobno kot samotni sunek. Njegova amplituda pada, dokler ne ostane samo prva dolina, nato amplituda te pada, dokler ne ostane samo drugi vrh. Tak sinus, ki ima nekje začetek, torej potuje tudi podobno kot sam sunek. Čeprav je njegova fazna hitrost lahko velika, bo prvi ekstrem izginjal in energija vala se bo prenašala s hitrostjo, ki je manjša od fazne - torej z grupno hitrostjo.

Zaključek

O pojavu

Na delavnici smo proučevali gibanje vala na mediju z disperzijo. Tak medij je tudi voda. Povzemimo ugotovitve.

- (1) Pri potovanju motnje na sredstvu z disperzijo opazimo dve hitrosti: fazno in grupno. S fazno hitrostjo potuje posamezen vrh, a ta čez čas izgine in zamenja ga dolina. Pri tem nastane zaostanek. Energija motnje tako potuje s hitrostjo (grupno), ki je manjša od fazne.
- (2) Disperzija se pojavi zaradi dodatne povratne sile na delce medija. Tak medij lahko obravnavamo kot sistem sklopljenih nihala. Lastna frekvenca posameznega nihala je ključen parameter pri dodločanju (fazne) hitrosti vala. V valovni enačbi se pojavi dodaten člen, ki jo spremeni v t.i. Klein-Gordonovo enačbo.
- (3) Prvi vrh sinusnega vala se obnaša podobno kot motnja, zato ne potuje s fazno hitrostjo.

Razumevanje pojave disperzije je pomembno predvsem, ko slišimo o nadsvetlobnih faznih hitrostih. Tedaj se je dobro spomniti, da se s to hitrostjo ne da prenositi energije, grupna hitrost pa je vedno manjša od fazne.

O metodi proučevanja pojava

Na delavnici smo delali tako, da ste udeleženci sami odkrivali lastnosti vala na mediju z disperzijo ob manjši pomoči vodje. Delavnica je bila strukturirana v obliki učnega cikla (Etkina et al. 2007).

- (1) Najprej ste opazovali pojav. Prišli ste do nekaterih ugotovitev. Opazili ste, da se val ne giblje kot običajen val.
- (2) Nato ste dobili vprašanje, na katerega ste poskušali odgovoriti.
- (3) Ob iskanju odgovora ste prišli do ugotovitve, da obstajata dve hitrosti. Ta ugotovitev je ustvarila dovolj t.i. potrebe po znanju, da lahko razlaga pade na plodna tla.
- (4) Šele po vseh vaših ugotovitvah smo povedali izraze (grupna in fazna hitrost) in dodali o grupni hitrosti to, česar niste ugotovili sami. Nadaljevali smo z dodatnimi temami (analiza mehanizma, uporaba ...)

Čeprav tema namensko presega srednješolsko znanje, je zgoraj opisan postopek odkrivanja novega znanja povsem prenosljiv na srednješolske teme.

Viri

- Bertozi, E. (2010). Hunting the ghosts of a 'strictly quantum field': the Klein-Gordon equation, *Eur. J. Phys.* **31**, 1499.
- Etkina, E., and Van Heuvelen, A. (2007). Investigative Science Learning Environment - A Science Process Approach to Learning Physics. In Redish, E. F. and Cooney, P. J. (Ed.), *Research-Based Reform of University Physics*, American Association of Physics Teachers, College Park, MD, 2007, Reviews in PER Vol. 1, <<http://www.per-central.org/document/ServeFile.cfm?ID=4988>>.
- Gravel, P., Gauthier, C. (2011). Classical applications of the Klein-Gordon equation, *Am. J. Phys.* **79**, 447-453.
- Mouchet, A. (2008). Interaction with a field: a simple integrable model with backreaction, *Eur. J. Phys.* **29**, 1033.