**Stalno strokovno spopolnjevanje**

Oddelek za fiziko, Fakulteta za matematiko in fiziko

---

# Iz zgodovine nihanja in valovanja

Janez Strnad

## Uvod

Nihanje in valovanje sta pomembni v vsakdanjem življenju. Če ju ne bi bilo, ne bi bilo ne zvoka ne svetlobe in ne bi mogli meriti časa na ustaljen način. Sta tudi zgled za to, kako tesno je fizika povezana z matematiko. V fiziki ju ne bi mogli podrobno opisati brez matematike, ta pa je veliko vzpodbud dobila pri raziskovanju nihanja in valovanja.Del korenin izvira iz glasbe in sega v daljno preteklost, drugi del iz trigonometrije, ki je v matematiko prišla iz astronomije.

---

"Otroci lahko gledajo nihala, kot so to otroci počeli tisoče let, ne da bi spoznali katero od naravoslovnih lastnosti nihala [...]. O nihalu pa bodo nekaj zvedeli [...], ko jih bodo učinkovito poučili učitelji, ki so usvojili fiziko in matematiko gibanja nihal in ki jim lahko prenesejo to znanje na smiseln in zanimiv način."

M. R. Matthews, 2000

---

Najprej na kratko orišemo razvoj s fiziko povezanega dela glasbe in trigonometrije. Nato obravnavamo nihanje v mehaniki in električno nihanje. Kot se je poglabljalo znanje o nihalih, se je širila njihova uporaba. Nato sledijo razdelki o valovanju v mehaniki, posebej valovanju na gladini vode, o valovanju po dolgih elekričnih vodnikih in gravitacijskemu valovanju. Mednje sta vrinjena razdelka z računi za nihanje težnega nihala pri velikih amplitudah in nihanje nihala s težko vrvjo ter razdelka z današnjima pogledoma na nihanje in valovanje.

Včasih je težko ali nemogoče ugotoviti, kdo se je prvi dokopal do kakega spoznanja. Ob tem se je koristno spomniti *ničtega izreka iz zgodovine naravoslovja* zgodovinarja naravoslovja Ernsta Petra Fischerja: "Odkritja (pravilo, zakon, spoznanje), ki nosi ime po kaki osebi, ni naredila ta oseba." Podobno je za matematiko trdil Vladimir I. Arnol'd. Fizik Michael Berry je šel še dlje:

"Nikoli ni nič odkrito prvič." [1] Izjave te vrste so pretirane, nakazujejo pa resno težavo, ki prida posbno do izraza pti preprostih napravah, kot so na primer nihala.

### Glasba

V Egiptu je mogoče videti 5 tisočletij stare slike glasbenih inštrumentov. Z glasbo so se ljudje ukvarjali že tisoč let prej v Indiji, na Kitajskem, Japonskem in morda tudi v Egiptu samem. Pitagora (582-546 pr. n. š.) in njegovi somišljeniki so raziskovali nihanje strun. Menda so v ta namen že uporabljali preproste *strunjake*, *monokorde*. Ugotovili so, da enaki in enako napeti struni, dasta prijeten zvok, če sta njuni dolžini v razmerju majhnih celih števil. Spoznali so, da se zdi zvok tem višji, čim krajša je struna.

Kaže, da so si že v starih časih predstavljali, kako struna spravi v nihanje okolni zrak in zvok potuje po zraku. Aristotel (384-322 pr. n. š.) je zapisal, da izvir spravi zrak v gibanje in da ta "pritiska naprej na podoben način na okolni zrak, da potuje zvok nespremenjen v kvaliteti tako daleč, kot uspe to motnji zraka". Okoli leta 350 pr. n. š. je napisal knjigo *Elementi harmonij*. Podobno knjigo naj bi napisal tudi Evklid kakih petdeset let pozneje.

Zvok so imeli za valovanje po podobnosti z valovanjem na vodni gladini. Valovanje nastane zaradi nihanja izvira in potuje od izvira, ne da bi se snov premaknila za večjo razdaljo. O tem so ugibali med drugimi grški filozof Hrizip (okoli 240 pr. n. š.), rimski inženir in arhitekt Vitruvij (okoli leta 25 pr. n. š.), rimski filozof Boetij (480-524).

### Trigonometrija

Astronomi so opazovali telesa na nebu in vse natančneje ugotavljali njihovo lego. Aristarh s Samosa je okoli leta 260 pr. n. š. kote še navajal kot dele pravega kota. Babilonsko kotno mero, po kateri polnemu kotu ustreza $360^\circ$, so vpeljali pozneje. Uporabljal jo je "najznamenitejši astronom starega veka" Hiparh iz Nikeje (180-125 pr. n. š.), ne vemo pa, ali jo je on uvedel. Prvi je sestavil tablico tetiv na krogu s polmerom $r$, po naše $2r \sin \frac{1}{2}\varphi$, v odvisnosti od središčnega kota $\varphi$. Zato ga imamo tudi za "očeta trigonometrije". Tedaj so se bolj ukvarjali s stranicami trikotnikov, ne s koti. Trikotniki na krogli so se jim zdeli enako zanimivi kot trikotniki v ravnini.

Klavdij Ptolemaj (90-168) je dopolnil Hiparhovo delo v trigonometriji in sestavil tablice tetiv. Te tablice enako kot Hiparhove poznamo samo po poročilih drugih astronomov. S časom so spoznali nekaj zvez med tetivami, ki ustrezajo na primer našim adicijskim izrekom za sinus. Ptolemaj je krožnici včrtal enakostranični trikotnik, kvadrat, enakostranični petkotnik ... in izračunal tetive kotov 36°, 72°, 60°, 90° in 120°. Nato je z enačbo, ki ji ustreza naša enačba za sinus polovičnega kota, izračunal tetive za polovične kote. Za $\sin\frac{1}{2}^{\circ} = \sin 30'$ je – v našem zapisu – navedel 0,0087268, kar se od današnje vrednosti 0,0087265 razlikuje na sedmem mestu za decimalno vejico.

Delo so nadaljevali indijski matematiki – morda na podlagi dela grških astronomov. Kaže, da so v 5. stoletju sestavili najstarejše ohranjene tablice za naš sinus. "Sinus" so zaznamovali s sanskrtsko besedo "ardha-jiva" (pol tetive), "jiva" ali "jya". Pozneje sta izpopolnila računanje tablic Ariabhata okoli leta 500 in Bhaskara okoli leta 1150. Nekateri podatki so negotovi. Indijsko znanje je seglo tudi na Kitajsko. Arabski matematiki, med njimi Musa al-Kvarizmi, so izraz "jiba" prevzeli, ne da bi mu priredili kak pomen. Prevajalci v latinščino v 12. stoletju pa so ga napačno razumeli kot "jaib", zaliv ali guba (v arabski pisavi brez samoglasnikov) in prevedli kot "sinus". Indijski in arabski matematiki so poznali enačbe za sinus komplementarnega kota, dvojnega kota in polovičnega kota.

V Evropi je Johannes Müller iz Königsberga, Regiomontanus (1435-1476) v knjigi *O trikotnikih vseh vrst* leta 1464 trigonomtrijo obravnaval kot samostojno vejo matematike. Nikolaj Kopernik (1473-1543) je v svojem delu *O vrtenjih nebesnih krogel v šestih knjigah* v prvi knjigi dve poglavji posvetil trigonometriji. Še pred izidom Kopernikove knjige je Georg Joachim von Lauchen, Rheticus, (1514-1574) ti poglavji leta 1542 izdal kot samostojno *Malo knjigo o stranicah in kotih trikotnika* s svojim predgovorom. Rheticus, ki mu pripisujejo zasluge za izid Kopernikovega velikega dela, je vpeljal sinus, kosinus, sekans, kosekans, tangens in kotangens: $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $\sec(\varphi) = 1/\cos(\varphi)$, $\mathrm{cosec}(\varphi) = 1/\sin(\varphi)$, $\tan(\varphi) = 1/\cot(\varphi)$.

Tangens in kotangens so že prej uvedli po drugi poti. Višino predmetov je po dolžini sence ugotavljal že Tales iz Mileta. Prvo ohranjeno tablico senc so objavili Arabci okoli leta 860. V latinskem prevodu so uporabili izraza umbra recta in umbra versa. Iz tega sta se razvila tangens in kotangens.

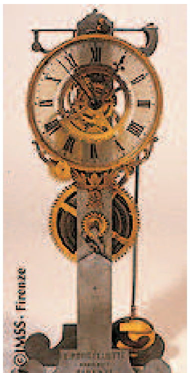
Rheticusovo delo je nadaljeval njegov učenec Valentinus Otho (Valentin Otto, 1548-1605), ki je leta 1596 uredil in izdal *Palatinsko delo o trikotnikih* (izid je podprl palatinski volilni knez). V njem so vrednosti navedene na deset mest v korakih po $10''$. Bartholomäus Pitiscus (1561-1613) je z delom *Trigonometrija ali merjenje trikotnikov* leta 1595 uvedel novo ime. Njegove tablice iz leta 1613 so navajale vrednosti na petnajst mest.

V razvoju trigonometrije je sodelovalo veliko matematikov iz več dežel, ki so imeli različne poglede in so uporabljali različne prijeme. Rheticus je že razumel na primer sinus kot razmerje med kateto in hipotenuzo v pravokotnem trikotniku. Toda sinus kot funkcijo kota je vpeljal šele Leonhard Euler v knjigi *Uvod v analizo neskončnega* leta 1748. Podprl je tudi sedanje znake in merjenje kotov z loki. Dotlej ni bilo videti sinusne krivulje. Le Gilles de Roberval (1602-1675) jo je mimogrede skiciral, ko je računal ploščino pod cikloido, a se svojega koraka ni prav zavedel.

### Nihanje v mehaniki

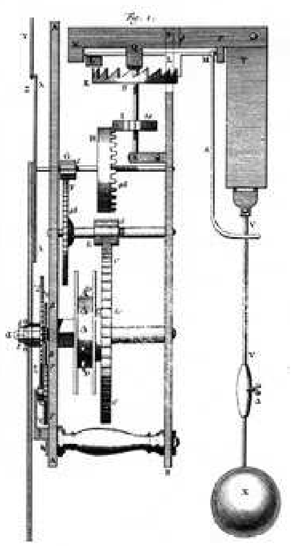
Nihalo naj bi izumil mitični Dedal sredi drugega tisočletja pred našim štetjem. Z njim naj bi si Aristofan (450-388 pr. n. š) pomagal pri merjenju časa.

Galileo Galilei (1564-1642) se je leta 1588 začel zanimati za nihala – menda potem, ko je v stolnici v Pisi opazoval nihanje lestenca. Po letu 1602 je raziskoval nihanje nihal, oblikoval matematične napovedi in jih primerjal z izidi merjenj pri poskusih. Zagotovil je, da je nihajni čas nitnega nihala značilen za nihalo in sorazmeren s korenom iz dolžine. Mislil je, da ni odvisen od amplitude in da dušenje ne vpliva nanj. To približno velja le pri majhnih amplitudah in majhnem dušenju. Leta 1641 je predlagal, da bi nihalo uporabil za krmiljenje ure in se o tem posvetoval s sodelavci. Kaže, da zamisli ni več izvedel, in so model, ki ga velikokrat vidimo na sliki, naredili pozneje.




Slika 1: Model ure na nihalo naj bi naredili po Galilejevem predlogu iz leta 1641.

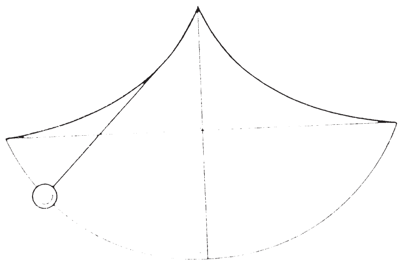
Galilejev življenjepisec Vincenzo Viviani je leta 1659, sedemnajst let po Galilejevi smrti, poročal: "Spominjam se, da se mu je nekega dne leta 1641, ko sem živel pri njem v njegovi vili v Arcetriju, porodila zamisel, da bi lahko nihalo prilagodili uram na uteži ali peresa, namesto običajnega *tempa*, upal je, da bi zelo enakomerno in naravno gibanje popravilo napake v umetnosti ur. Ker pa mu je slepota onemogočala, da bi naredil risbe in modele, je Galilei sinu Vincenziu, ki je nekega dne prišel iz Firenc v Arcetri, opisal zamisel in sledilo je nekaj razprav. Končno sta se odločila za načrt, [...], da bi ga izvedli in ugotovili tiste težave naprav, ki jih navadno ne predvidimo, dokler le razpravljamo."



Slika 2: Uro na nihalo so izdelali leta 1657 po Huygensovem načrtu iz leta pred tem. Utež, ki poganja nihalo, ni narisana.

Mehanične ure so začele nadomeščati vodne ure, a so bile premalo natančne za astronomsko rabo. Po načrtu Christiaana Huygensa (1629-1695) iz leta 1656 so naslednje leto izdelali prvo uro na nihalo. Nihalo se krmili samo tako, da mu spuščajoča se utež preko zasunka ob vsakem nihaju dovede toliko energije, kolikor je je šlo v izgubo zaradi dela trenja in upora. Pri tem utež požene nihalo, ko gre skozi ravnovesno lego. Tedaj je moč, to je produkt sile in hitrosti, največja. Ob vsakem nihaju nihalo dopusti, da se zobato kolo zasuče za en zob. Pozneje je objavil knjigo *Ura na nihalo in o nihanju nihala.*

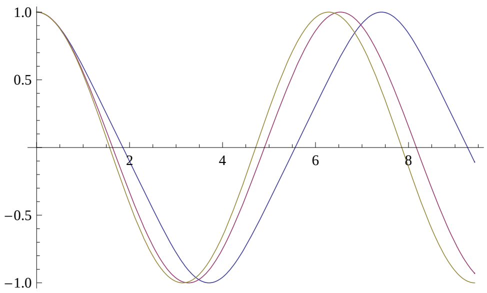
Leta 1669 je spoznal, da je nihajni čas odvisen od amplitude, in to, da ni odvisen od amplitude, če se telo giblje po cikloidi. To krivuljo so že dobro poznali. Njena evolventa je tudi cikloida. Tako mu je uspelo z vodiloma v obliki cikloid voditi telo na niti po cikloidi.



Slika 3: Huygens je s cikloidnima vodiloma dosegel, da je nitno nihalo nihalo po cikloidi z nihajnim časom, ki je bil neodvisen od amplitude.

Slika 4: Jean Bernard Foucault je leta 1851 v pariškem Pantheonu pri zemljepisni širini $48,8^\circ$ pokazal znamenito nihalo. Nihajna ravnina 28 kilogramske krogle na 67 m dolgi vrvi se je za polni kot zasukala v 24 h$/\sin 48,8^\circ = 31,9$ urah. To je nedvoumno podprlo misel, da se Zemlja vrti okoli osi.

Odtlej nihanje izkoriščamo v napravah za merjenje časa. Nihalo da notranjo časovno enoto, krmilna naprava kot povratna zanka ob pravih trenutkih dovaja energijo iz izvira energije. Po uri na težno nihalo, ki jo je poganjala utež, so izdelali uro na polžasto vzmet z nemirko, uro s kremenovim kristalo in z električnim nihajnim krogom ter uro na curek atomov cezija in druge atomske ure.




Slika 5: Odmik nitnega nihala v odvisnosti od časa pri velikih amplitudah odstopa od kosinusne krivulje. Na ordinatno os je naneseno razmerje $\varphi(t)/\varphi_0$, na abscisno pa $\sqrt{g/l}\,t = 2\pi t/t_0$. Rumenozelena krivulja ustreza zelo majhni amplitudi, ko $\mathrm{cn}(\frac{1}{2}\sin^2\varphi_0, 2\pi t/t_0)$ za $\varphi_0 \to 0$ preide v $\cos(2\pi t/t_0)$, rdeča amplitudi $\pi/4$ in modra amplitudi $\pi/2$.

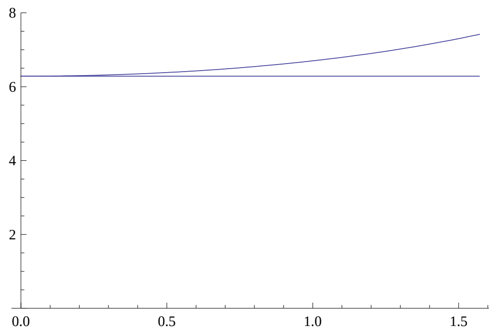
---

Nihanje težnega nihala pri velikih amplitudah

Za nihanje nitnega nihala iz Newtonovega zakona za vrtenje sledi enačba $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$. Za majhne odmike je približno $\sin\varphi = \varphi$ in je nihajni čas $t_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Za večje odmike enačbo pomnožimo s $\dot{\varphi}$ in integriramo. Dobimo $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = (g/l)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$, če je $\varphi_0$ amplituda. Enačba $dt = \sqrt{l/g}\,d\varphi/\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$ sledi tudi naravnost iz izreka o kinetični in potencialni energiji. Z zvezo $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sin\frac{1}{2}\varphi_0\sin\alpha$ vpeljemo novo spremenljivko $\alpha$. Z njo izračunamo najprej diferencial $d\alpha = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi d\varphi/(\sin\frac{1}{2}\varphi_0\cos\alpha)$ in z zvezo $\cos\varphi = \cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi$ še $\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0\cos^2\alpha$. S tem iz začetne enačbe dobimo

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_0, \alpha)\,.$$

Pri tem je $F(k,\alpha) = u$ eliptični integral prve vrste. Njegova inverzna funkcija je Jacobijeva amplituda $\alpha = \mathrm{am}(k,u)$. Nazadnje dobimo $\varphi/\varphi_0 =$




Slika 6: Nihajni čas cikloidnega nihala ni odvisen od amplitude (spodnja črta), nihajni čas navadnega težnega nihala (zgornja krivulja) pa je. Na ordinatno os je nanesena količina $t_0\sqrt{g/l}$, na abscisno pa amplituda $\varphi_0$ v ločni meri.

$\mathrm{cn}(\sin^2 \frac{1}{2}\varphi_0, \sqrt{g/t}\,t)$. Pri tem je cn Jacobijeva funkcija cosinus amplitudinis $\mathrm{cosam}(k, u)$ in $\sqrt{g/l}t = 2\pi t/t_0$. Nihajni čas nihala je:

$$t_0 = 4\sqrt{l/g}\,E(\sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi_0)\,.$$

Pri tem je $E(\sin^2 \frac{1}{2}\varphi_0) = F(\sin^2 \frac{1}{2}\varphi_0, \frac{1}{2}\pi)$ polni eliptični integral prve vrste.

---

Leta 1673 je Jean Richer poročal o merjenjih na odpravi v Cayenne v Francoski Gvajani. Nihalo v Cayennu bliže ekvatorja je nihalo počasneje kot enako nihalo v Parizu. Tedaj so pogosto opazovali nihanje *sekundnega nihala*, nitnega nihala z nihajnim časom 2 s in dolžino okoli 0,994 m. Isaac Newton je po odkritju gravitacijskega zakona napovedal, da je Zemlja na tečajih sploščena. Nihalo bliže ekvatorja niha počasneje zaradi centrifugalnega pospeška in zaradi tega, ker je bolj oddaljeno od središča Zemlje kot na tečaju.

Robert Hooke (1635-1703) je obravnaval *konično nihalo*, pri katerem nit opisuje plašč stožca. To ga je napeljalo na misel, da je mogoče delovanje telesa na telo razstaviti na radialno in na tangentno komponento. O tem je v pismu poročal Newtonu in s tem prispeval, da je ta odkril zakone gibanja in gravitacijski zakon.

Huygensa je zanimalo tudi nihanje *fizičnega nihala*, ki ga dandanes obravnavamo v mehaniki togih teles. Privzel je, da težišče nihala ne more doseči večje višine, kot jo ima na začetku v mirovanju, in da je gibanje mogoče obrniti. Po tedanji navadi ga ni zanimal nihajni čas, ampak *reducirana dolžina* $l_r$, to je dolžina nitnega nihala z enakim nihajnim časom. Ugotovil je, da je $l_r = \sum m_i l_i^2 / \sum m_i l_i$. V tem se je pojavila količina $\sum m_i l_i^2$, ki jo je Euler pozneje vpeljal kot *vztrajnostni moment*. Fizično nihalo, denimo drog, naj najprej niha okoli krajišča. Z enakim nihajnim časom niha okoli vzporedne osi skozi točko v razdalji reducirane dolžine. S takim *reverzijskim nihalom* so si nekdaj pomagali pri merjenju težnega pospeška. Na drogu s premično utežjo in dvema vzporednima osema so merili nihajni čas okoli prve in okoli druge osi. Utež so premikali, dokler nihalo pri določeni legi ni imelo enakega nihajnega časa okoli obeh osi. Tako so dobili reverzijsko nihalo, ki je okoli obeh osi nihalo z enakim nihajnim časom kot nitno nihalo z dolžino razdalje med osema.

V letih od 1904 do 1929 je bil ameriški standard za čas ura na nihalo. Nihala so uporabljali za merjenje težnega pospeška in v seizmologiji.

---

"V fizikalnem praktikumu dam svojim študentom preprost namig: vedno odgovorite, da gre za harmonični oscilator [sinusno nihalo], če nanese vprašanje na neznano napravo. Ne glede na to, ali gre za avtomobil, nihalo ali telefon, v načinu opazovanja fizika uporabljamo približke, dokler ne postane linearni harmonični oscilator."

R. U. Sexl, 1964

---

Dandanes nihanje obravnavamo ločeno od valovanja. *Nihanje* v širšem pomenu vključuje vse pojave, ki se ponavljajo v enakih časovnih razmikih. Nihanje v ožjem pomenu pa je *sinusno* ali *harmonično nihanje*. Sinusno nihanje na eni strani zadeva gibanje točkastega ali togega telesa, na drugi pa stoječe valovanje kot gibanje kontinuuma.

Premo sinusno nihanje v mehaniki točkastega ali togega telesa opišemo s projekcijo enakomerno krožečega telesa na premer

$$s = s_0 \cos(\omega t - \delta) .$$

$s$ je odmik od ravnovesne lege, $s_0$ *amplituda*, $\nu = 1/t_0$ frekvenca in $\omega = 2\pi\nu$ *krožna frekvenca*. Nihajni čas $t_0$ je časovna perioda. *Fazni premik* $\delta$ največji odmik od časa $t = 0$ premakne k času $\delta/\omega$. Če imamo opraviti z enim samim nihanjem, je smiselno izbrati fazni premik 0. Namesto funkcije kosinus lahko uporabimo funkcijo sinus.

Pri nihanju nihala na vijačno vzmet s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{k/m}$ s koeficientom vzmeti $k$ se prožnostna energija vzmeti $W_{pr} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ks_0^2\cos^2\omega t$ preliva v kinetično energijo uteži $W_k = \frac{1}{2}\omega^2 s_0^2 \sin^2\omega t$ in nazaj, tako da je njuna vsota, *energija nihanja*, $W = W_k + W_{pr} = \frac{1}{2}ks_0^2 = \frac{1}{2}\omega^2 s_0^2$ konstantna.

Pri *dušenem nihanju* se energija nihanja zaradi negativnega dela upora s časom manjša. Amplituda pojema sorazmerno z $\mathrm{e}^{-\beta t}$ s *koeficientom dušenja* $\beta$, energija pa sorazmerno z $\mathrm{e}^{-2\beta t}$. Nedušeno nihanje dobimo, ko nihalu v vsakem nihaju dovedemo toliko energije, kolikor je v tem času zaradi upora izgubi.

---

## Električno nihanje

Na začetku 19. stoletja so opazili prve znake električnega nihanja. William Hyde Wollaston (1766 do 1828) je leta 1801 elektroliziral vodo s tokom, ki ga je poganjala Voltova baterija, in s tokom pri praznjenju leidenske steklenice. V drugem primeru so se pojavili na isti elektrodi mehurčki kisika in vodika, ker je tok imel zdaj to zdaj drugo smer.

Joseph Henry (1799-1878) je leta 1842 objavil ugotovitve o indukciji pri praznjenju leidenske steklenice. Po smeri magnetnice ob vodniku med elektrodama je sklepal na smer toka. Zasledil je tok v eni smeri in "nekaj odbitih tokov nazaj in naprej, šibkejših od prejšnjih". Hermann von Helmholtz je v razpravi *O ohranitvi sile* leta 1847 pojasnil, zakaj sproščena toplota pri praznjenju kondenzatorja ni odvisna od vodnika med priključkoma kondenzatorja: "Praznjenje kondenzatorja si ne predstavljamo kot enostavno gibanje elektrike v eni smeri, ampak kot tok v eno in v drugo stran [...], kot nihanje, ki postaja vse šibkejše in šibkejše."

William Thomson lord Kelvin (1824-1907) je leta 1853 izpeljal enačbo za tok v krogu z upornikom, kondenzatorjem in tuljavo. S tem je postavil temelje teorije električnega nihanja. Drugi Kirchhoffov izrek za napetost po sklenjenem električnem krogu $RI + LdI/dt = -e/C$ je odvajal po času in upošteval zvezo $I = de/dt$:

$$L\frac{d^2e}{dt^2} + R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = 0.$$

Enačbo reši dušeno nihanje s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}$ in koeficientom dušenja $\beta = \frac{1}{2}R/L$. Do nihanja pride, če velja $C > 4L/R^2$. Nihanje je nedušeno s krožno frekvenco $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$, če je koeficient dušenja zelo majhen. Enačbo je z merjenji podprl Behrend Wilhelm Feddersen (1832 do 1918) v letih od 1857 do 1866. Z oscilografom na vrtečo se prizmo je opazoval časovni potek isker pri praznjenju kondenzatorja.

### Valovanje v mehaniki

Dananes tudi nihanje zveznih sistemov, ki jih opišemo s kontinuum, obravnavamo ločeno od nihanja nihal. Nekdaj tega niso razločevali. Najjprej so se ukvarjali z nihanjem strun. Galilei je opazoval resonanco. Marin Mersenne (1588-1648), ki je neodvisno od Huygensa ugotovil, da je nihajni čas nitnega nihala odvisen od amplitude, je opazoval nihanje dolgih šibko napetih strun. Prvi je neposredno izmeril frekvenco dolge šibko napete strune 64 $\mathrm{s}^{-1}$ in s tem ugotovil zvezo med višino tona in frekvenco. Svoje ugotovitve je opisal v *Knjigi harmonij* leta 1636. Zasluge si je pridobil tudi s tem, da je v času, v katerem še ni bilo revij, s pismi širil znanje.

Joseph Sauveur (1653-1717) je spoznal in poimenoval *osnovno frekvenco* in *višje harmonične frekvence*. Opazoval je *vozle* in *hrbte* in ugotovil, da imajo strune pri višjih harmoničnih frekvencah več vozlov. Opazoval je tudi *utripanje*, ko sta se oglasili orgelski piščali z malo različnima lastnima frekvencama. Poskuse s strunami so delali tudi Hooke, John Wallis (1616-1703) in drugi. Za struno, ki je vpeta na obeh krajiščih v razdalji $l$, zahteva robni pogoj $l = n\cdot\frac{1}{2}\lambda$. Iz tega sledi za lastne frekvence $\nu_n = \frac{1}{2}nc/l$ z $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Brook Taylor (1685-1731), ki ga poznamo po Taylorjevi vrsti, je leta 1713 izračunal osnovno lastno frekvenco strune. Z Newtonovim načinom fluksij je za kratek odsek strune uporabil drugi Newtonov zakon. Frekvenca, ki jo je dobil, se je ujemala z izmerjeno frekvenco. Taylorjev način so izboljšali Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) in Leonhard Euler (1707-1783). Ti so uporabili Leibnizevo obliko diferencialnega računa in vpeljali parcialne odvode. O tem, koliko je prispeval kateri od njih, ni enotnega mnenja. Njihovo delo so nadaljevali Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) in drugi. Taylor, ki se je v sporu za prvenstvo pri odkritju infinitezimalnega računa med Newtonom in Leibnizem postavil na stran prvega, pa je vztrajal pri manj uporabni Newtonovi obliki. Leta 1747 je d'Alembert izpeljal *valovno enačbo*. V eni razsežnosti se glasi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) s = 0\,.$$

Zapis z dvema oklepajema izvira iz poznejšega časa. Levi oklepaj ustreza valovanje, ki potuje proti levi, in rešitev desnega valovanje, ki potuje proti desni. Nekdaj so to upoštevali z rešitvijo: $s(x,t) = s_1(x-ct) + s_2(x+ct)$.

Daniel Bernoulli je v letih 1747 in 1755 ugotovil, da lahko struna niha z več lastnimi frekvencami. Ugotovitev so tedaj imenovali *načelo koeksistence majhnih nihanj*, danes je to *načelo superpozicije*.

V valovno enačbo vstavimo nastavek za sinusno nihanje, to je stoječe valovanjen $s(x,t) = S(x)\cos\omega t$. Funkcija $S(x)$ podaja od kraja odvisno amplitudo, $\cos\omega t$ pa sinusno nihanje. Nastavek pripelje do *amplitudne enačbe* s $k = \omega/c$:

$$\frac{d^2S}{dx^2} + k^2 S = 0\,.$$

V stoječem valovanju se gostota kinetične energije $w_k = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t$ preliva v gostoto prožnostne energije $w_{pr} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \sin^2 kx \cos^2 \omega t$ in nazaj.

Rešitev amplitudne enačbe določata *robna pogoja*. Pri pogojih $S(x = 0) = S(x = l) =)$ je rešitev $S(x) = S_n \sin n\pi x/l$. Rešitev valovne enačbe po načelu superpozicije je potem:

$$s(x,t) = \sum_n S_n \sin n\pi\frac{x}{l}\cos n\pi\frac{ct}{l}\,.$$

Pri rešitvah te vrste so se pojavili pomisleki matematične narave, ali je mogoče tako razviti tudi funkcije, ki so zvezne le na odsekih, s skoki v točkah. Joseph Fourier (1768 -1830) v *Dinamični teoriji toplote* leta 1822 ni imel teh pomislekov. Zato se *Fourierove vrste* imenujejo po njem, nekateri menijo, da neupravičeno. Pokazalo se je, da je s Fourierovo vrsto mogoče opisati nezvezne funkcije in vrsta v točki skoka dá polovico vsote desne in leve limite. Konstantne koficiente $S_n$ določa *začetni pogoj* $s(x, t = 0)$ z ortogonalmostjo lastnih rešitev $\int_0^l \sin n\pi x/l \sin m\pi x/l dx = \delta_{mn}$ takole $S_n = \int_0^l s(x, t = 0)\sin n\pi x/l$.

---

Tudi pri valovanju v mehaniki dodajmo nekaj pripomb z današnjega stališča. Nihanje in valovanje nista tesno povezani samo v razvoju, ampak tudi v opisu. Lahko bi rekli, da je valovanje nihanje, ki potuje. V *ravnem potujočem valovanju* postane fazni premik odvisen od kraja:

$$\cos(\omega t - \delta(x)) = \cos\omega(t - \delta(x)/\omega) = \cos\omega(t - x/c) = \cos(\omega t - \omega x/c)$$

$$= \cos(\omega t - kx) = \cos(kx - \omega t)\,.$$

Pri tem smo iz mehanike točkastega telesa preskočili v mehaniko – enorazsežnega – kontinuuma. Amplituda $s_0$ se ne spreminja s krajem, odmik pa se spreminja s krajem in časom:

$$s(x,t) = s_0 \cos(kx - \omega t) = s_0 \cos 2\pi(x/\lambda - t/t_0)\ .$$

Velikost *valovnega vektorja* je $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ in *valovna dolžina* $\lambda$ je krajevna perioda. Funkcijo dveh spremenljivk lahko ponazorimo s *časovnim potekom* v dani točki $s(x = konst, t)$ ali s *krajevno odvisnostjo* ob danem času $s(x, t = konst)$.

Gostota kinetične in gostota prožnostne energije v valovanju sta:

$$w_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \quad \text{in} \quad w_{pr} = \frac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 .$$

Obe gostoti energije se enako spreminjata s krajem in časom – sta celo enaki: $w_k = w_{pr} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$. Povprečje po kraju ali po času je $\overline{w}_k = \overline{w}_{pr} = \frac{1}{4}\rho\omega^2 s_0^2$. Energija potuje s hitrostjo $c$, tako da je gostota energijskega toka $j = c(\overline{w}_e + \overline{w}_m) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 c$.

Sestavimo sicer enaki ravni valovanji, ki potujeta v nasprotnih smereh, pa dobimo *stoječe valovanje*:

$$s(x,t) = \tfrac{1}{2}s_0 \cos(kx - \omega t) + \tfrac{1}{2}s_0 \cos(kx + \omega t) = s_0 \cos kx \cos \omega t\,.$$

Kot je mogoče sestaviti stoječe valovanje iz potujočih valovanj v nasprotnih smereh, je mogoče sestaviti potujoče valovanje stoječih:

$$s_0 \cos kx \cos \omega t + s_0 \sin kx \sin \omega t = s_0 \cos(kx - \omega t)\,.$$

V teoretični fiziki navadno ravno valovanje zapišemo s kompleksno funkcijo $\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$ z realnim delom $\cos(kx - \omega t)$. Zato je opis enega sinusnega nihanja ali valovanja s kosinusom bolj priljubljen. V srednji šoli je bolj priljubljen sinus, čes da govorimo o *sinusnem* valovanju.

Po tekočinah in trdninah potuje *longitudinalno valovanje*, v katerem deli snovi nihajo v smeri potovanja. Longitudinalno valovanje s frekvenco na pasu od 20 do 20 000 $\mathrm{s}^{-1}$ je *zvok*. Za prenos sporočil in pri *sonarju* uporabljamo *ultrazvok* z večjo frekvenco.

Po trdninah potuje tudi *transverzalno valovanje*, v katerem deli snovi nihajo pravokotno na smer potovanja. Hitrost transverzalnih valov $c_t =$

$\sqrt{G/\rho}$ je manjša od hitrosti longitudinalnih valov $c_l = \sqrt{E/\rho}$, ker je strižni modul $G$ manjši od prožnostnega modula $E$. Med moduloma velja zveza $E/G = 2(1+\mu)$, v kateri je $\mu$ Poissonovo število. Pri Poissonovemu številu $\mu = 0,5$ se trdnini ob natezanju ne bi spremenila prostornina. Navadno je Poissonovo število manjše. Pri $\mu = 0,3$ je $c_t = 0,6c_l$. Transverzalno valovanje je mogoče *polarizirati*. V valovanju na vodi, ki ga bomo obdelali posebej, se deli vode na gladini gibljejo po krožnicah – v globini po elipsah – v navpični ravnini.

---

Nihanje nihala s težko vrvjo

Zanimivo je nitno nihalo s težko, gibko, a neraztezno vrvjo [2]. Račun s prožno vrvjo bi bil še precej bolj zapleten. Pri tem nihalu vodi pot preko valovne enačbe. Vzemimo, da drobna utež z maso $m$ visi na vrvi z maso $M$ in dolžino $l$. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v ravnovesno lego uteži. Os $x$ usmerimo navpično navzgor, tako da je spodnje krajišče vrvi pri $x = 0$ in pritrjeno krajišče pri $x = l$. Odmike vrvi $s(x,t)$ opazujemo v vodoravni smeri. Vrv pri koordinati $x$ napenja teža uteži in spodnjega dela vrvi: $F = (m + Mx/l)g$. Njeno vodoravno komponento določa nagib vrvi: $F_s = F\partial s/\partial x$. Po Newtonovem zakonu del vrvi z dolžino $dx$ v vodoravni smeri pospešuje sila $dF_s$, tako da je $dF_s = adM = (\partial^2 s/\partial t^2)Mdx/l$ in $\partial F_s/\partial x = (l/M)\partial^2 s/\partial t^2$. Dobimo valovno enačbo:

$$lg\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{m}{M} + \frac{x}{l}\right)\frac{\partial s}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\,.$$

Prvi robni pogoj velja v pritrjenem krajišču: $s = 0$ pri $x = l$. Iz Newtonovega zakona za utež $m\partial^2 s/\partial t^2 = mg\partial s/\partial x$ izluščimo drugi robni pogoj $\partial^2 s/\partial t^2 = g\partial s/\partial x$ pri $x = 0$.

Zanima nas nihanje vrvi, ko se vsi njeni deli gibljejo enako. Nastavek $s(x,t) = S(x)\cos\omega t$ pripelje do amplitudne enačbe:

$$lg\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{m}{M} + \frac{x}{l}\right)\frac{dS}{dx}\right] + \omega^2 S = 0\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $M/m + x/l = z^2$, tako da je $dx = 2zdz \cdot l$. Z njo preide enačba v:

$$\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dS}{dx} + k^2 s = 0$$

s $k^2 = 4l\omega^2/g$. To je Besselova diferencialna enačba. Prvi robni pogoj zahteva $S = 0$ pri $x = l$, to je pri $z = \sqrt{1 + m/M}$, drugi robni pogoj pa $dS/dx = -\frac{1}{2}k^2\sqrt{m/M}S$ pri $x = 0$, to je pri $z = \sqrt{m/M}$.

Rešitev sestavimo iz Besselove funkcije $J_0$ prve vrste reda 0 in Neumannove funkcije istega reda $N_0$. Prvemu robnemu pogoju pri $x = l$, to je pri $z = \sqrt{1 + m/M}$, ustreza rešitev:

$$S = N_0(k\sqrt{1 + m/M})J_0(kz) - J_0(k\sqrt{1 + m/M})N_0(kz)\,.$$

Lastno vrednost $k^2$ izračunamo iz drugega robnega pogoja pri $x = 0$, to je pri $z = \sqrt{m/M}$, če upoštevamo, da je $dJ_0(kz)/dz = -kJ_1(kz)$ in $dN_0(kz) = -kN_1(kz)$:

$$N_0(k\sqrt{1 + m/M})J_1(k\sqrt{m/M}) - J_0(k\sqrt{1 + m/M})N_1(k\sqrt{m/M}) =$$

$$= \frac{1}{2}k\sqrt{\frac{m}{M}}[N_0(k\sqrt{1 + m/M})J_0(k\sqrt{m/M}) - J_0(k\sqrt{1 + m/M})N_0(k\sqrt{m/M})]\,.$$

Enačbo je treba rešiti numerično. Programski paket *Mathematica* ne dopušča rešitve naravnost. Pomaga pa z risanjem funkcij. Za zgled vzemimo, da ima vrv enako maso kot utež $M = m$. V tem primerun je najmanjša rešitev $k = 2,113$, kar da nihajni čas: $t_0 = (2/k) \cdot 2\pi\sqrt{l/g}$. To je 2/2,113 = 0,947-krat manj kot pri enako dolgem nihalu z zelo lahko nitjo. Za primerjavo izračunajmo še nihajni čas enako dolgega droga z enako težko utežjo na prostem krajišču: $t_0 = \sqrt{8/9} \cdot 2\pi\sqrt{l/g} = 0,934 \cdot 2\pi\sqrt{l/g}$.

V primeru, da niha vrv brez uteži, postavimo $m = 0$ in je $z^2 = x/l$. Robna pogoja se glasita $S(z = 1) = 0$ in $dS/dx = 0$ pri $z = 0$. V tem primeru je rešitev $J_0(kz)$ pri pogoju $J_0(k) = 0$. Robni pogoj $J_1(0) = 0$ ježe izpolnjen. Prva ničla Besselove funkcije $J_0(k_1) = 0$ je $k_1 = 2,4048$. Z njo iz zveze $k_1 = 2\omega\sqrt{l/g}$ dobimo nihajni čas $t_0 = (2/k_1) \cdot 2\pi\sqrt{l/g} = 0.832 \cdot 2\pi\sqrt{l/g}$. Vrv niha 1,019-krat hitreje od droga, za katerega velja $t_0 = \sqrt{2/3} \cdot 2\pi\sqrt{l/g} = 0,816 \cdot 2\pi\sqrt{l/g}$.

---

## Valovanje na gladini vode

Newton je v *Principih* obravnaval nihanje tekočine v cevkah v obliki črke U in to nihanje primerjal z nihanjem nihala. Pri tem v knjigi ni najti funkcije sinus ali njene slike. V njej je za hitrost potovanja valov v ozkih kanalih z globino $h$ izpeljal: $c = \sqrt{gh}$. Posvetimo nekaj pozornosti *valovom na vodni gladini*. Najprej so na vrsti valovi v globoki vodi, pri katerih je globina veliko večja od valovne dolžine. Vzamemo, da se deli vode na gladini gibljejo po krogih s polmerom $r$ in s hitrostjo $v = \omega r$. V opazovalnem sistemu, ki potuje s hitrostjo valov $c$ v smeri valov, valovni vrhovi mirujejo. V stacionarnih razmerah velja Bernoullijeva enačba, s katero povežemo točki na valovnem vrhu in v valovni dolini: $\frac{1}{2}\rho(c-v)^2 + \rho g \cdot 2r = \frac{1}{2}\rho(c+v)^2$. Iz enačbe sledi za hirost valov $c = g/\omega = \sqrt{g\lambda/2\pi}$.

Uvidimo, da imajo ti valovi *disperzijo*, se pravi, da je njihova hitrost odvisna od valovne dolžine ali frekvence. Navedli smo *fazno hitrost* $c = \omega/k$, s katero bi potovala sprememba oblike v enobarvnem valovanju. V valovanju z disperzijo energija potuje s *skupinsko hitrostjo* $c_g = d\omega/dk$, ki je pri teh valovih enaka polovici fazne hitrosti. Na ta način pojasnimo tudi razklon svetlobe pri lomu na prizmi. Pri valovih z majhno valovno dolžino je treba upoštevati površinsko napetost $\gamma$: $c = \sqrt{g\lambda/(2\pi) + 2\pi\gamma/(\rho\lambda)}$.

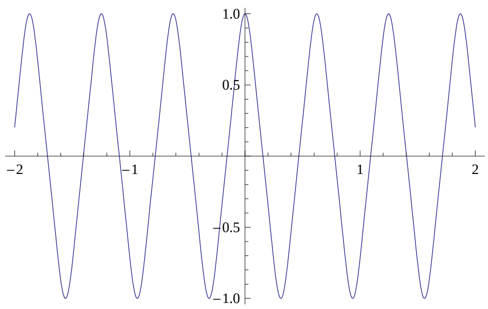
V plitvi vodi so razmere drugačne. Opazujmo potovanje valovnega čela v prizmatični posodi s širino $b$ in višino vode $h$ s premično stransko steno. To začnemo potiskati z dodatno silo $\delta F = bh\delta p = bh\,\rho gs$. Za $s$ se poveča višina vode tostran valovnega čela. Iz zahteve, da je tekočina nestisljiva sledi $vh = cs$ in iz izreka o gibalni količini: $\delta Ft = bh\rho gs\,t = \rho bhct \cdot v$ in $cv = hg$. Iz enačb sledi hitrost $c = \sqrt{gh}$. Tako smo dobili hitrost, s katero potuje *cunami*. Pri povprečni globini ocena 5 km meri na primer ta hitrost 220 m/s.

Podrobnejša izpeljava pripelje do splošne enačbe, ki zajame obe skrajnosti: $c = \sqrt{(g\lambda/2\pi)\tanh(2\pi h/\lambda)}$. Enačbo je izpeljal v *Plimovanju in valovih* George Biddell Airy (1801-1892). Pri $h \to 0$ je $\tanh x\ x$, pri $h \to \infty$ pa $\tanh x \approx 1$.

V tej zvezi kaže omeniti *Korteweg-de Vriesovo enačbo*:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3s}{2h}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 s}{\partial x^3}\right) = 0\,.$$

V doktorskem delu jo je pod mentorstvom Diederika Johannesa Kortewega (1848 - 1941) izpeljal Gustav de Vries (1868 - 1934) leta 1894. Drugi člen v oklepaju upošteva nelinearnost in tretji disperzijo. Zaradi nelinearnosti potuje motnja z večjo amplitudo hitreje od motnje z manjšo amplitudo, zaradi disperzije pa motnja z večjo amplitudo počasneje. Učinek nelinearnosti izravna učinek disperzije. Po gladini lahko potujejo *solitarni valovi* kot

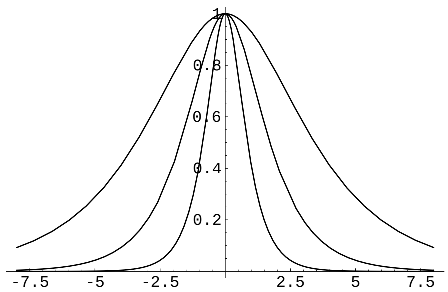



Slika 7: V trenutni sliki solitarnega valovanja pri $t = 0$ je na ordinatno os naneseno razmerje $s(x)/s_0$, na abscisno pa koordinata $x$. Valovanje opiše funkcija $s/s_0 = \mathrm{cn}^2(\sqrt{3(s_0 + l)/4h^3}x|m)$ z amplitudo $s_0 = 0,25$ m, globino $h = 1,6$ m, $l = 9s_0/16$ in $m = 0,64$. Po uporabljeni funkciji govorijo tudi o *knoidalnih valovih.*

periodična motnja in *soliton* kot osamljena motnja. Po optičnem vodniku v snovi z disperzijo in nelinearnostjo solitoni na infrardečem območju prenašajo sporočila.

Zanimivo je, da opisa obeh pojavov ni uspelo iz ene razsežnosti razširiti na dve ali tri. Ker nelinearnost izravna učinek disperzije valovi na globoki vodi potujejo s hitrostjo $c = \sqrt{gh}$, ki smo jo izpeljali za valovanje v plitvi vodi. Tako je v oceanu s povprečno globino 5 km hitrost valov 220 m/s, to je 800 km/h. S približno tolikšno hitrostjo potujejo cunamiji [3].

Prejšnja razprava je zadevala nestisljive tekočine. Omenimo še longitudinalno valovanje v plinih. Newton je za hitrost zvoka v zraku navedel $c = \sqrt{p/\rho} = \sqrt{RT/M}$. Najprej so mislili, da se izmerjena hitrost ujema z izračunano. Pozneje so uvideli, da dá enačba premajhno hitrost. Newton je upošteval Boylov zakon $pV =$ konst., ki velja pri konstantni temperaturi. Spoznali so, da se temperatura spreminja in se plin segreje, ko ga stisnemo, in ohladi, ko ga razpnemo. Laplace je na nenavaden način izpeljal enačbo za toplotno izoliran plin $pV^\kappa$ =konst. s $\kappa = c_p/c_V$, ki jo je razširil Siméon-Denis Poisson (1781-1840). Enačba je dala pravo hitrost $c = \sqrt{\kappa p/\rho} = \sqrt{\kappa RT/M}$. Zanimivo je, da ji Sadi Carnot (1796-1832) in Emil Clapeyron (1799-1864) nista zaupala in je nista uporabila. Zadnje dvome je razpršil Rudolf Clausius (1822-1888).




Slika 8: V trenutni sliki solitonov je na ordinatno os naneseno razmerje $s(x)/s_0$, na abscisno pa koordinata $x$. Soliton opiše $s/s_0 = 1/\mathrm{ch}^2\sqrt{3s_0/h^3}x)$ z Jacobijevo funkcijo cosinus amplitudinis cn (glejte str. 7). Širši vrh ustreza $s_0 = 0,125$ m, srednji $s_0 = 0,5$ m in ožji $s_0 = 0,5$ m. Diagram kaže razmerje $s(x)/s_0$, zato je v resnici ožji vrh dvakrat višji, širši pa dvakrat nižji od srednjega.

## Svetloba

Na začetku 19. stoletja je Thomas Young (1773-1829) širil misel, da svetloba ni roj hitrih delcev, ampak longitudinalno valovanje. Pri tem se je opiral na podobnost z zvokom. Svetloba naj bi potovala po *etru*, kot zvok potuje po zraku. Valovanje etra so obravnavali v mehaniki. Leta 1817 je Young polarizacijo pojasnil s transverzalnim valovanjem. S tem pa je eter dobil lastnost trdne snovi, čeprav so se telesa po njem gibala brez upora. Nenavadne lastnosti etra naj bi Younga odvrnile od nadaljnjega raziskovanja svetlobe. Augustin Fresnel (1788-1827) je brez pomislekov dalje razvil teorijo transverzalnega valovanja etra. Za odboj in lom valovanja na meji dveh območij je leta 1823 izpeljal *Fresnelove enačbe*, ki so obveljale.

V elektrodinamiki je laže slediti razvoju.James Clerk Maxwell (1831-1879) je po zamislih Michaela Faradaya sestavil teorijo elektrike in magnetizma. V njej je leta 1862 prišel na podlagi o mehaničnih predstavah o etru do valovne enačbe s hitrostjo, ki se je ujemala z izmerjeno hitrostjo svetlobe. Pozneje je vpeljal električno in magnetno polje in uvidel, da je sveloba elektromagnetno valovanje. Heinrich Hertz (1857-1894) je z odkritjem radijskih valov leta 1888 podprl Maxwellove ugotovitve. Dolgotrajni poskusi, da bi izmerili hitrosti Zemlje v etru, so leta 1905 pripeljali do posebne teorije relativnosti Alberta Einsteina (1879-1955), po kateri je postal eter nepotreben.

Sledimo Maxwellu na današnji način. V trnsverzalnem valovanju na določenem kraju električno in magnetno polje nihata tako, da spremenljivi polji vzdržujeta drugo drugo. V vakuumu iz indukcijskega zakona in Amperovega zakona,ki sta v praznem prostoru do predznaka simetrična::

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{in} \quad \mathrm{rot}\,\vec{B} = c^{-2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sledi na primer

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = c^{-2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\,,$$

ker je $-$ rot rot$\vec{E} = \nabla^2\vec{E}$ zaradi div$\vec{E} =$ div$\vec{B} = 0$. Pri tem je hitrost $c = 1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$. Velja $\vec{E} = \vec{c}\times\vec{B}$. Jakost električnega polja $E_y = E_0\cos(kx - \omega t)$ ima na primer smer osi $y$ in gostota magnetnega polja $B_z = (E_0/c)\cos(kx - \omega t)$ smer osi $z$, če valovanje potuje v smeri osi $x$. Gostoti energije električnega polja in magnetnega polja se s krajem in časom enako spreminjata in sta celo enaki: $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kx - \omega t) = w_m = \frac{1}{2}B_0^2\cos^2(kx - \omega t)/\mu_0$. Povprečje po času ali kraju je enako $\overline{w}_e = \overline{w}_m = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{4}B_0^2/\mu_0$, tako da je gostota energijskega toka $j = (\overline{w}_e + \overline{w}_m)c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c = \frac{1}{2}B_0^2 c/\mu_0$.

Vidna svetloba ima valovno dolžino na pasu od 400 do 700 nm. Za prenos sporočil uporabljamo tudi elektromagnetno valovanje z manjšo frekvenco. Zvok, za katerega imamo ljudje izvir in sprejemenik, in svetloba, za katero imamo le sprejemnik, sta zelo pomembna načina za prenos sporočil.

---

### Valovanje po dolgih elekričnih vodnikih

Kelvin je leta 1866 sodeloval pri uspešnem polaganju podmorskega kabla, potem ko poskusi v letih 1851, 1856 in 1865 niso uspeli. Faraday je že leta 1854 opozoril, da je mogoče podvodni kabel obravnavati kot zelo dolgo leidensko steklenico. Steklu ustreza izolacija kabla, notranji elektrodi žica in zunanji elektrodi morska voda. Potovanje signalov po vodniku je leta 1876 splošno opisal Oliver Heaviside (1850-1925) s *telegrafsko enačbo.* Mislimo si neskončen vodnik, ki ima na dolžinsko enoto upor $R'$, induktivnost $L'$, kapaciteto med elektrodama $C'$ in prevodnost izolacije med elektrodama $G'$. Najprej vzemimo, da ni izgub in postavimo $R' = G' = 0$. Enačbo za inducirano napetost na tuljavi $U = -LdI/dt$ zapišemo za kratek odsek vodnika: $\partial U/\partial x = -L'\partial I/\partial t$, iz enačbe za tok s kondenztorja $de/dt = -I = CdU/dt$

pa podobno sledi $\partial I/\partial x = -C'\partial U/\partial t$. Napetost $U(x,t)$ in tok $I(x,t)$ se spreminjata s krajem in časom. Enačbi odvajamo po kraju in nato po času ter dobimo valovni enačbi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L'C'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L'C'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

s hitrostjo $c' = 1/\sqrt{L'C'}$.

Pri vodniku z izgubami preideta prvotni enačbi v:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L'\frac{\partial I}{\partial t} - R'I \quad \text{in} \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -C'\frac{\partial U}{\partial t} - G'U\,.$$

Razmere so zapletene. Če sta $R'$ in $G'$ razmeroma majhni, potuje po vodniku valovanje, ki s krajem eksponentno slabi.

Kompleksna impedanca na dolžinsko enoto vodnika izmeničnega signala s krožno frekvenco $\omega$ je $Z' = \sqrt{(R' + i\omega L')/(G' + i\omega C')}$. Motnjam se izognemo, če izpolnimo Heavisidov pogoj $G'L' = R'C'$. Tedaj postane impedanca neodvisna od krožne frekvence $Z'_0 = \sqrt{L'/C'}$. Pri dolgem podmorskem kablu prevladajo elektrostatični pojavi in je mogoče zanemariti indukcijo. Del enačb je v pismu Georgeu Gabrielu Stokesu zapisal Thomson že leta 1854. Gustav Robert Kirchhoff je leta 1857 enačbe dopolnil. Mihajlo Pupin (1858-1935) je izboljšal prenos s *pupinizacijo* tako, da je v vodnik vgradil dodatne dele z induktivnostjo in kapaciteto.

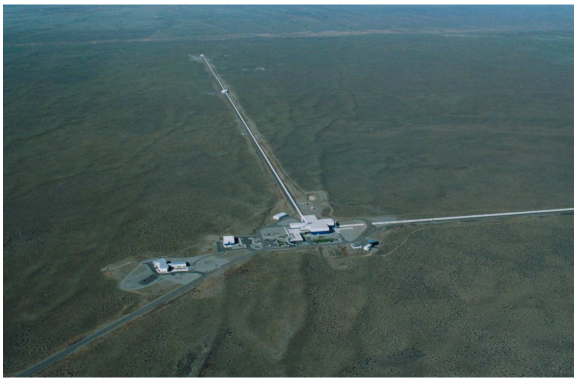
## Gravitacijsko valovanje

Končno hitrost gravitacijskega polja je omenil Hendrik Antoon Lorentz leta 1900, *gravitacijsko valovanje* pa Henri Poincaré pet let pozneje. Albert Einstein je leta 1916 enačbo za valovanje izpeljal iz približka splošne teorije relativnosti za šibko polje. Valovanje nastane, če zvezdi krožita okoli skupnega težišča ali zvezdi trčita ali zvezda eksplodira. Gostota energijskega toka v valovanju je zelo majhna, tako da je valovanje težko zaznati. V tenzorskem valovanju se na danem kraju v trenutku v smeri pravokotno na potovanje valovanja gravitacija za malenkost poveča, pravokotno na to smer in na smer potovanja pa za malenkost zmanjša.

Po letu 1960 je Joseph Weber zagotavljal, da je opazoval gravitacijsko valovanje. Poldrug meter dolg aluminijev valj s premerom pol metra ali meter je v izsesani posodi visel na žicah, pritrjenih na skladovnici jeklenih in gumijastih opek, da so nanj kolikor mogoče malo vplivali tresljaji iz okolice.

Slika 9: Joseph Weber pregleduje eno od svojih gravitacijskih anten.

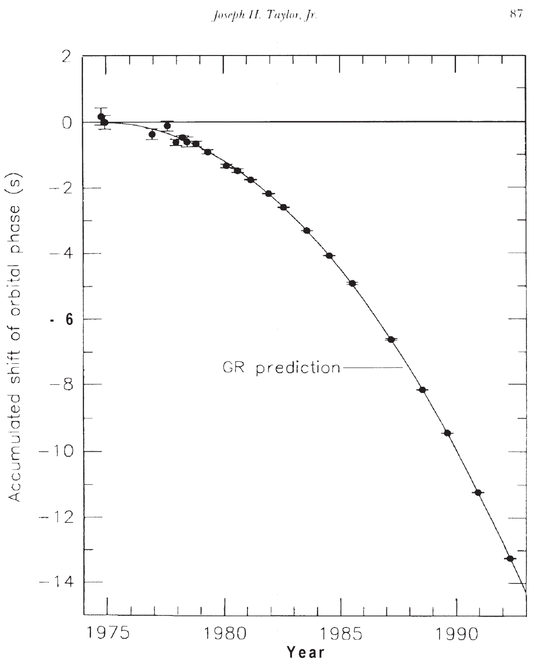
Sunek gravitacijskih valov naj bi povzročil nihanje delov valja. Nihanje so zaznavali s piezoelektričnimi kristali na valju. Valj so ohladili, da so zmanjšali toplotno nihanje. Med letoma 1961 in 1969 je Weber opazoval nihanje anten, ki ga je pripisal sunkom gravitacijskega valovanja iz vesolja. Zdaj vemo, da gravitacijskega valovanja ni zaznaval. Kljub temu je imel pomembno vlogo v razvoju gravitacijskih anten.



Slika 10: Interferometer severne postaje LIGO v Hanfordu iz zraka.

Zaradi spremembe gravitacije se spremeni ukrivljenost štirirazsežnega prostora in z njo krajevna razdalja med točkama, a tudi dolžina merila. Spremembo je mogoče zaznati s svetlobo v Michelsonovem interferometru.

V ZDA so zgradili interferometra LIGO v Hanfordu in v več kot 3 tisoč kilometrov oddaljenem Livingstonu. Z njima je mogoče ugotoviti zakasnitev pri premiku nekaj $10^{-18}$ m, čemur ustreza relativna natančnost $1 : 10^{21}$. Valovanja še niso zaznali, znatno pa so znižali mejo, pri kateri bi ga zaznali. Podobna interferometra so zgradili tudi pri Pisi v Italiji in pri Hannovru v Nemčiji. S povezovanjem ameriških in evropskih interferometrov nameravajo precej izboljšati občutljivost.




Slika 11: Hulse in Taylor sta izmerila časovno odvisnost zasuka periastrona, ki ustreza zasuku Merkurjevega perihelija. Izmerki ležijo na krivulji, ki jo napove splošna teorija relativnosti. Na ordinatno os je nanesen zasuk kot zakasnitev v sekundah, na abscisno pa čas v letih. Merjenje je posredno podprlo obstoj gravitacijskega valovanja, ker sta v računu upoštevala energijo, ki jo odnaša valovanje.

O obstoju gravitacijskega valovanja so se prepričali z merjenjem posredno. Leta 1974 sta Joseph H. Taylor in Russell A. Hulse opazovala sunke radijskih valov s pulzarja, ki se giblje okoli skupnega težišča z nevtronsko zvezdo. Štiri leta sta z Dopplerjevim pojavom sledila gibanju pulzarja in ugotovila, kako se manjšata razdalja med telesoma in obhodni čas. Zmanjšanje je bilo prav tolikšno, kot ga je napovedala splošna teorija relativnosti, če sta upoštevala energijo, ki jo je odneslo gravitacijsko valovanje.

Nekaterih za valovanje značilnih pojavov, na primer uklona, interference in Dopplerjevega pojava sploh nismo obravnavali. To kaže, kako na široko bi bilo mogoče zajeti valovanje in kako ta pojav skupaj z nihanjem povezuje dele fizike. Tudi vseh povezav nismo omenili, denimo nihanje atomov v kristalni mreži v termodinamiki. "Valovanje" sega tudi v kvantno mehaniko, le da ga moramo v tem primeru, denimo za gibajoči se delec, zapisati kompleksno $e^{i(px-Wt)/\hbar}$ za razliko od valovanja v klasični fiziki, pri katerem je odločilen le realni del, četudi ga opišemo s kompleksnim izrazom.

Možnost, da fiziko obravnavamo po pojavih in, denimo, pregledamo nihanje in valovanje v vseh njenih vejah, se zdi posrečena. Najbrž pa za poučevanje ni posebno priporočljiva. Najbrž bi s tem težko zajeli vse dele fizike. Kot nalašč pa je za taka predavanja ali za knjige, ki jih ob učnem gradivu preberejo le zainteresirani učenci, dijaki ali študenti. Zavest o vezeh med deli fizike prispeva k razumevanju zakonov fizike in zaupanju vanje.

Kolegu Alešu Mohoriču se zahvaljujem za pomoč pri urejanju besedila in pri prenašanju in vstavljanju slik.

## LITERATURA

[1] J. D. Jackson, *Examples of the zeroth theorem of the history of science*, Am. J. Phys. **76** (2008) 161.

[2] *Nihanje vrvi z utežjo*, Obzornik mat.fiz. **5**(1956/57)90.

[3] *Solitoni in cunamiji*, Obzornik mat.fiz. **52**(2005)161.